Trabajo de Fin de Máster

Máster en Lógica y Filosofía de la ciencia

Parcialidad en Lógica Modal de Primer Orden

Autor
Víctor Bautista Torres

Tutora
María Manzano Arjona

Estructura de la presentación

1. Explicación y justificación del título, y valor filosófico del trabajo.

2. Estructura del trabajo.

3. Cuestiones fundamentales.

4. ¿Se alcanza el objetivo del trabajo?

5. Proyección futura.

Título y valor del trabajo en el paradigma filosófico actual

"Parcialidad en Lógica Modal de Primer Orden"

¿Es pertinente?

- Sí; buscamos explicar el fenómeno de la parcialidad en la Lógica Modal de Primer Orden (FOML).

¿Qué es la parcialidad?

- Un fenómeno que se produce al evaluar las fórmulas de la lógica modal (en mundos posibles de modelos, y no solamente en modelos).
- Implica que la interpretación de términos sea parcial: al interpretar términos en distintos mundos, podemos contemplar casos en los cuales estos términos no denoten ningún objeto del dominio (sea local, o el total).
- A la hora de contemplar este fenómeno, de las múltiples opciones posibles, se ha escogido que los términos puedan no denotar; pero que las fórmulas, al ser evaluadas en un mundo, siempre son verdaderas o falsas).

¿El trabajo tiene algún valor en el paradigma filosófico actual?

Sí, dada su novedad:

- La Lógica Modal se ha desarrollado especialmente en su versión proposicional.
- No tanto en su versión de Primer Orden.
- Menos aún en Primer Orden con cuantificación actualista (cuando el dominio de los cuantificadores varía de un mundo a otro).

¿Es novedoso exponer FOML con cuantificación actualista?

- No. En las obras citadas ya se hace, pero si nos centramos en el cálculo...
- Sí que es novedoso hacerlo proporcionando un cálculo de secuentes (puesto que las obras citadas lo hace con cálculos axiomáticos o de tableaux).
- Además, las obras en las que aparece un cálculo de secuentes para FOML, éste se proporciona para marcos de dominios constantes (sin cuantificación actualista).

Estructura del trabajo.

El trabajo consta de cinco apartados, pero los dos apartados fundamentales son el segundo y el tercero, y, por tanto, son en los que vamos a centrarnos en la exposición (centrándonos en las secciones clave). Estos apartados son:

- Primera parte: Introducción
- **Segunda parte**: Lógica Modal de Primer Orden (FOML).
  - Exposición del lenguaje formal.
  - Semántica de dominios variable.
  - Modelos parciales.
  - Denotación y existencia.
- **Tercera parte**: Cálculo de Secuentes y Teorema de Corrección.
  - Reglas del cálculo de secuentes.
  - Teorema de Corrección.
- Cuarta parte: Resultados, conclusiones, y proyección futura.
- Quinta parte: Bibliografía.

Segunda parte: FOML.

<u>Exposición del lenguaje forma</u>.

- Se presentan los símbolos que se utilizan a lo largo del trabajo.
- Se muestra cómo se forman las expresiones del lenguaje formal.
    - Términos simples y complejos.
    - Relatores y Predicados.
    - Fórmulas atómicas y compuestas.
- Se aclara la noción de estancia libre y ligada de una variable en una fórmula.

<u>Semántica de dominios variables.</u>

- Los marcos *S*, según esta semántica, cuentan con el conjunto de *Dw*.
- Los *Dw* son los dominios locales (que juntos hacen *D*), sobre los cuales tienen alcance los cuantificadores al evaluar las fórmulas.
- La interpretación *I* es no-rígida: depende siempre de los mundos.
- Se define la noción de *modelo*, la de asignación *x*-variante y la denotación de los términos para llegar a la de *verdad en un mundo de un modelo* según esta semántica.
- Se enuncia la proposición 2.7, que es el lema de coincidencia: si dos asignaciones coinciden en sus variables libres, ambas hacen verdadera en un mundo una misma fórmula.

Modelos parciales.

- Son necesarios para hablar de la denotación y la existencia.
- La *I*, en estos modelos, es parcial.
    - Puede haber términos que no denoten y las funciones son parciales.
- La noción de *verdad en un mundo de un modelo* cambia para el caso de los relatores y los predicados con lambda.

Denotación y existencia sintácticamente.

- Para expresar estas nociones sintácticamente nos apoyamos en los modelos normales.
    - La igualdad entre términos se entiende como la identidad.
- Es necesario definir la interpretación de la identidad, y cuándo esta relación es verdadera en un mundo entre dos términos.
- Posteriormente se muestra la contrapartida sintáctica de la denotación y de la existencia (y la no-existencia), y cómo se relacionan estas expresiones.

Tercera parte: Cálculo de secuentes y Teorema de Corrección.

Reglas del cálculo de secuentes.

- Cuarenta y seis reglas de cálculo (para todas las conectivas).
- Además, se incluye la distinción de Bimbó entre reglas operacionales y estructurales.
- Especial interés en las reglas para los cuantificadores y el abstractor.
  - Son las reglas en las que cobran peso las cuestiones de denotación y existencia.
- Las reglas de DEN y EXISTS se incluyen por ser expresiones que aparecen en otras reglas, aunque son predicados abstractos.
- Las reglas para el cuantificador existencial y el operador modal de posibilidad se dan por interdefinición con su complementario con la negación.

Teorema de Corrección.

- La consecuencia sintáctica expresada por los secuentes es además semántica.
- Para probar esto, interpretamos los secuentes como un condicional que ha de ser válido.
- La prueba del teorema se desarrolla en base a la estrategia de inducción sobre el número de pasos de una prueba del cálculo.
  - Se prueba para cuando la prueba consta de un paso, y para cada vez que se añade una regla.
  - Por lo general, se sigue la estrategia de reducción al absurdo.

Cuestiones Fundamentales

Lógica Modal de Primer Orden

- Primer orden: mayor capacidad expresiva que proposicional.
  - El lenguaje consta de:
    - Términos (*t*): variables (*x*), constantes (*a*) y términos functoriales (*fn*).
    - Expresiones complejas:
      - Fórmulas atómicas: $P^n t_1 \ldots t_n$ y predicados abstractos ($\langle \lambda x.A \rangle (t_i)$).
      - Fórmulas complejas: $\neg A$, $\exists x A$, $\forall x A$, $\Box A$, $\Diamond A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ y $A \leftrightarrow B$.
- Modal: Verdad en un modelo –> Verdad en un mundo de un modelo.
  - Una misma fórmula puede ser verdadera en un mundo de un modelo y falsa en otro (del mismo modelo).
  - Nociones de necesidad y posibilidad en base a relación de accesibilidad entre mundos.

Modelo.

- Un modelo M es un par de elementos tal que $M = \langle S, I \rangle$; donde S es el marco *(Skeleton)* tal que $S = \langle D, W, R, \langle Dw \rangle_{w \in W} \rangle$ e I es la interpretación no-rígida definida para las constantes, functores, y predicados.

Elementos de *S*.

- W es el conjunto de mundos en los que evaluamos las fórmulas.
- R es la relación de accesibilidad entre los elementos de W.
- D es el dominio de individuos.
- Dw es el dominio local para cada w.
    - Los cuantificadores de primer orden lo hacen para elementos de Dw.
    - Por esto hablamos de cuantificación actualista.
        - $\forall xA$ es verdadera en el mundo w si la fórmula A vale para cada Θ de Dw.
        - $\exists xA$ es verdadera en el mundo w si la fórmula A vale para algún Θ de Dw.

I: Interpretación No-rígida.

- La *I* es la función que interpreta los distintos elementos del lenguaje en los mundos del modelo.
- En este trabajo La interpretación de términos y predicados es siempre no-rígida.
    - Al interpretar predicados y términos en un mundo del modelo, la interpretación depende del mundo, y puede no coincidir en todos.
    - Dicha interpretación no necesariamente está definida sobre *Dw*.
- Además, presentamos dos interpretaciones no-rígidas distintas: la total y la parcial.
    - Aun así, la interpretación de las fórmulas en un mundo de un modelo siempre las mandará solamente a verdadero o falso.
    - Interpretación no-rígida total:
        - Todos los términos denotan elementos de *D.*
        - Interpretación de constantes en un mundo: $Iw(a) \in D$.
        - Interpretación de términos functoriales en un mundo: $Iw(f^n) : D^n \to D$.
        - Interpretación de relatores en un mundo: $Iw(P^n) \subseteq D^n$.
        - La verdad en un mundo de un modelo con esta interpretación es la habitual.
            - Sin olvidar que para el caso de los cuantificadores, el dominio de cuantificación es el local.

- Interpretación no-rígida parcial:

  - Puede haber términos cuya interpretación no esté definida, y por tanto no denoten ningún elemento de *D.*

  - Interpretación de constantes en un mundo: $Iw(a) \in D$, ó $Iw(a) = *$.

  - Interpretación de términos functoriales en un mundo: $Iw(f^n) : D^n \rightsquigarrow D$.

  - La interpretación de los relatores en un mundo se define igual: $Iw(P^n) \subseteq D^n$.

  - Al tener este tipo de *I*, la verdad en un mundo de un modelo para las fórmulas atómicas varía de la siguiente manera:

    - Para el caso de fórmulas atómicas con un relator:

      $M, w, g \Vdash P^n(t_1 \ldots t_n)$ syss $\langle [t_1]^{M, w, g}, \ldots, [t_n]^{M, w, g} \rangle \in Iw(P^n)$ & todo $[t_i]^{M, w, g} \neq *$

    - Para el caso de fórmulas atómicas con predicado abstracto:

      $M, w, g \Vdash \langle \lambda x.A \rangle(t)$ syss $M, w, g' \Vdash A$, donde g' es la x-variante de g tal que $g'(x) = [t]^{M, w, g}$ & $[t]^{M, w, g} \neq *$

    - Para el caso de la relación de identidad:

      $M, w, g \Vdash (t_1 \equiv t_2)$ syss $[t_1]^{M, w, g} \neq *$ y $[t_2]^{M, w, g} \neq *$ & $[t_1]^{M, w, g} = [t_2]^{M, w, g}$

    - De nuevo, sin olvidar que para el caso de los cuantificadores, el dominio de cuantificación es el local.

Interpretación de términos en un mundo de un modelo.

- Los términos del lenguaje pueden denotar objetos del dominio o no.

  - Las variables siempre denotan el elemento que su asignación les dé: $[x]^{M,\, w,\, g} = g(x)$.

  - Las constantes pueden no denotar si su interpretación no está definida, y si lo está: $[a]^{M,\, w,\, g} = Iw(a)$.

    - Apunte: pueden denotar objetos del dominio local, o del domino total.

  - Los términos functoriales pueden no denotar si su interpretación no está definida para su argumento o si alguno de los términos de éste no denota. Cuando denotan, cumplen: $[f^n(t_1 \ldots t_n)]^{M,w,g} = [f^n]^{M,w,g}([t_1]^{M,w,g} \ldots [t_n]^{M,w,g})$.

Denotación y Existencia.

- Ambas nociones se pueden expresar sintácticamente.

  - Expresamos que un término denota a través de la siguiente fórmula: DEN(t), o lo que es lo mismo: $\langle \lambda x.x \equiv x \rangle (t)$.

  - Por otra parte, expresamos que aquello denotado por un término existe en un mundo (sea aquel del dominio local u otro) a través de la siguiente fórmula: EXISTS(t), o lo que es lo mismo: $\langle \lambda x.\exists y(y \equiv x)\rangle (t)$.

    - Esta fórmula puede ser falsa según dos posibilidades: si t no denota [puesto que no existe tal objeto, lo cual hace verdadera la expresión: $\neg \mathrm{EXISTS}(t)$], o si el objeto denotado existe en el D pero no en Dw.

      - Esta segunda posibilidad hace que la no-existencia se vuelve una propiedad positiva de los objetos que son denotados y que no pertenecen a un dominio local (pero sí a otro).

      - Esta propiedad la expresamos con la siguiente fórmula: $\overline{\mathrm{EXISTS}}(t)$, o lo que es lo mismo: $\langle \lambda x.\neg\exists y(y \equiv x)\rangle (t)$.

- Además, estas propiedades se relacionan según la siguiente expresión:

$$\mathrm{DEN}(t) \leftrightarrow [\mathrm{EXISTS}(t) \vee \overline{\mathrm{EXISTS}}(t)]$$

  - Es decir: Si un término denota algún objeto, éste existirá en Dw o no (pero, desde luego, existe en D); o en el otro sentido: Si un objeto existe en D (pudiendo estar o no en Dw), entonces ese objeto es denotado por un término.

Cálculo de secuentes

- Definimos secuente como la relación de consecuencia sintáctica entre dos conjuntos de fórmulas. El primero es el antecedente, y el segundo el consecuente. Entonces $\Gamma \vdash \Delta$ es un secuente.

- La relación de consecuencia sintáctica se mantiene según se aplican las reglas para modifican ambos lados del secuente.

- Al ser Γ un conjunto finito de fórmulas y Δ otro, la relación de consecuencia sintáctica la entendemos como deducibilidad, y la expresamos así:

$$\langle G_1, \ldots, G_n \rangle \vdash \langle D_1, \ldots, D_n \rangle \text{ syss } \langle G_1, \ldots, G_n \rangle \looparrowright \langle D_1, \ldots, D_n \rangle \text{ para } \langle G_1, \ldots, G_n \rangle \subseteq \Gamma$$

- Las reglas de las conectivas en el antecedente y consecuente son las clásicas.

- Las nociones de denotación (DEN) y existencia (EXISTS) son relevantes para las reglas de los cuantificadores y del lambda-abstractor.

$$\forall \looparrowright \qquad \frac{}{\forall x A(x), \mathrm{EXISTS}(y) \looparrowright A^y_x}$$

$$\lambda \looparrowright \qquad \frac{\Gamma, (\exists x A)^t_x, \mathrm{DEN}(t) \looparrowright \Delta}{\Gamma, \langle \lambda x.A(x) \rangle(t) \looparrowright \Delta}$$

$$\looparrowright \forall \qquad \frac{\Gamma, \mathrm{EXISTS}(y) \looparrowright A^x_y}{\Gamma \looparrowright \forall x A(x)}$$

$$\looparrowright \lambda \qquad \frac{\Gamma \looparrowright (\forall x A)^t_x \wedge \mathrm{DEN}(t)}{\Gamma \looparrowright \langle \lambda x A(x) \rangle(t)}$$

¿Se alcanza el objetivo del trabajo?

El objetivo del trabajo era iniciar una investigación en FOML con cuantificación actualista, y con un cálculo de secuentes correcto.

Este objetivo se alcanza en la medida en la que se logra exponer la lógica propuesta, tal y como se hace en los apartados del trabajo.

Proyección Futura

Amplia proyección futura:

- Para FOML:
  - Probar el teorema de completud para este sistema con este cálculo.
  - Extender la lógica modal de primer orden básica a otras lógicas modales añadiendo axiomas para la relación de accesibilidad.
- Para la extensión y expansión híbridas:
  - Añadir los nominales y el operador @ de satisfacción al lenguaje para obtener la lógica híbrida.
  - Exponer las implicaciones semánticas de estas modificaciones y proporcionar nuevas reglas de cálculo de secuentes.
- Los proyectos anteriores también se pueden contemplar en lógica de orden superior.
- Respecto a la filosofía del lenguaje:
  - Se podría tratar de expresar formalmente alguna cuestión más allá de la denotación y la existencia (descripciones definidas, conceptos intensionales, atribución de creencias, ficción…).

Fin de la presentación

Muchas gracias por su atención