Lógica de la indagación

Angel Nepomuceno Fernández
Grupo de Lógica, Lenguaje e Información
Universidad de Sevilla
nepomuce@us.es

Seminario del Grupo de Lógica, Lenguaje e Información
Universidad de Sevilla, 14/01/2022

Indice

Lenguaje para una lógica de la indagación

Se parte de $\mathcal{L}$, un lenguaje de predicados de primer orden, sin identidad ni functores, cuya sintaxis es la habitual. Un modelo $M = \langle D, \mathfrak{I} \rangle$, donde $D \neq \varnothing$ e $\mathfrak{I}$ es la función interpretación, tal que

1. Para cada constante $a \in \mathcal{L}$, $\mathfrak{I}(a) \in D$ —D es el universo de discurso de M, al que nos podemos referir también como $do(M)$; es decir, $do(M) = D$—
2. Si R es una constante predicativa de aridad $n \geq 1$, $\mathfrak{I}(R) \in \wp(D^n)$, o, lo que es lo mismo, $\mathfrak{I}(R) \subseteq (D^n)$

Dificultades en la enseñanza de la lógica

- En la docencia de la lógica ¿Cómo conseguir desarrollar las habilidades del alumno, por ejemplo, en el cálculo deductivo natural (CD)?
- ¿El CD representa formas de razonamiento habitual?
- ¿Sólo se aprende a calcular calculando?
- El razonamiento lógico ¿Es uno más entre otros?

Razonamientos

Dinámica lógica

La toería lógica debe ser entendida como una teoría de agentes que producen, transforman y transmiten información. Plantear una cuestión y dar una respuesta es tan **lógico** como obtener una conclusión por uno mismo. Podemos ver, en general, la argumentación con diferentes agentes como una noción clave en lógica (van Benthem, 2011)

La actividad de razonar es un juego de lenguaje y los agentes razonan según las reglas correspondientes.

El juego lógico

- En teoría de juegos es fundamental la distinción entre **reglas definitorias** del juego y **reglas estratégicas** del mismo.
- El problema principal en la enseñanza de la lógica radica en que las habilidades para alcanzar conclusiones "lógicas" requieren la asimilación previa de las estrategias.
- La **lógica de la indagación**, en la que se pueden plasmar respuestas a preguntas, es un juego con un jugador activo, el **indagador** —agente que puede hacer preguntas— frente a la **naturaleza** —pasiva, sólo da respuestas—.

Estructura del juego interrogativo

Se distinguen los siguientes elementos:

1. El agente, el **indagador**, que puede plantear preguntas
2. Un único **modelo** u **oráculo**, la "naturaleza", a la que el indagador puede hacer consultas (plantear preguntas)
3. El conjunto de respuestas posibles del oráculo, que **permanece constante** durante toda la indagación. Todas las respuestas deberían ser **verdaderas** (en el modelo) y el agente indagador **saber** que lo son.

Las reglas del juego

El indagador (el agente, el razonador, el lógico,...) hace un número de movimientos (podría no ser finito), a partir de premisas, para probar una tesis. Clases de movimientos:

1. **Inferenciales**. Son regidos por las **reglas de inferencia** habituales (en principio) en lógica clásica (tableaux tipo Beth, con ligeras modificaciones)
2. **Interrogativos**, regidos por una **regla interrogativa**, por la que el agente pregunta, y si el oráculo tiene una respuesta, ésta pasa a engrosar el conjunto de las premisas y sus consecuencias

Observación sobre las reglas

- Estas dos clases de reglas constituyen las reglas **definitorias** del juego
- Cabe considerar reglas **estructurales**, que determinan el curso del juego: cómo se inicia, cómo se concluye, etc.
- No se enumeran reglas **estratégicas**, si bien en cada momento se podrá determinar cuál es la mejor estrategia para lograr el objetivo (o sub-objetivos) propuesto(s)

Clases de cuestiones (Indagación no restringida)

Se pueden plantear restricciones o no a las respuestas (no hay una única lógica de la indagación). En el caso de una lógica de la indagación sin restricciones, el indagador puede plantear dos clases de cuestiones:

1. **Proposicionales** con la forma **¿Es el caso que φ_1,..., o φ_n?** —se incluyes las cuestiones sí-no (¿φ o $\neg\varphi$?)—, cuya respuesta es φ_i, $i \leq n$
2. **Cuestiones-quién**, de la forma **¿Qué individuo x es tal que $\varphi(x)$?**

Presuposiciones

Antes de que el indagador haga una pregunta, su **presuposición** debe ocurrir en la columna (izquierda) del subtableau correspondiente. Tipos de presuposiciones:

1. De una cuestión proposicional:

$$\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$$

   (Nótese que podría ser una implicación, de todas formas reducible a una forma disyuntiva)

2. De una pregunta-quién:

$$\exists x \varphi(x)$$

Cuántas preguntas

Siempre subyace la **gran** pregunta: ¿Se puede probar la conclusión a partir de las premisas en el modelo dado?

Pero nos centramos en las preguntas a las que puede responder el oráculo de inmediato. En cualquier estadio del juego, puede haber **tantas cuestiones** por parte del indagador como

1. **Disyunciones** —$\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$— y
2. **Cuantificaciones existenciales** —$\exists x \varphi(x)$—

haya en la columna de la izquierda

Observación sobre las formas lógicas

- Cabe pensar en la estructrura logica de la posibles respuestas, o en la forma lógica de las cuestiones que se planteen
- El número de cuantificadores es una medida de complejidad. La jerarquía de prenexas $\exists\forall$ se dfine
  1. Una fórmula sin cuantificadores tiene la forma prenexa $\forall^0 = \exists_0$
  2. Una sucesión de $\exists$ seguida por una prenexa $\forall^n$ es una prenexa $\exists^{n+1}$; una sucesión de $\forall$ seguida de una prenexa $\exists^n$ es una prenexa $\forall^{n+1}$

¿Restricciones al oráculo?

No es necesario asumir que la naturaleza (el oráculo) puede responder a toda posible pregunta del indagador. ¿Qué restricciones pueden plantearse? Según cómo se quieran establecer las reglas de uso. Las posiciones extremas:

- Caso **irrestricto**: no se imponen restricciones en términos de la jerarquía $\exists\forall$ (suponiendo las preguntas en forma prenexa)
- **Caso atomístico**. Es como restringir sólo a respuestas de cuestiones si-no

Tableaux

Para los conjuntos $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}$, $\Gamma \vdash_M \Delta$ expresa **Δ se infiere a partir de Γ en el modelo M** (se omitirá M para abreviar). Un tableau cerrado establece que la conclusión se deriva de las premisas. Punto de partida:

Premisas	Conclusión
Γ	Δ

(En este esquema se muestran dos subtablas, una con las premisas y otra con las conclusiones a probar).

Reglas Izquierda 1/2

- Doble negación

$$\frac{\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}$$

- Regla alfa:

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha_1, \alpha_2 \vdash \Delta}$$

- Regla beta

$$\frac{\Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \beta_1 \vdash \Delta \mid \Gamma, \beta_2 \vdash \Delta}$$

Reglas Izquierda 2/2

- Regla gamma:

$$\frac{\Gamma, \forall x\gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\gamma, \gamma(x/b) \vdash \Delta} \text{ para toda } b \text{ que ocurre en la (sub)tabla}$$

- Regla delta:

$$\frac{\Gamma, \exists x\delta \vdash \Delta}{\Gamma, \delta(x/b) \vdash \Delta} \text{ donde } b \text{ es nueva}$$

Reglas Derecha

Son “espejo” de las anteriores, como, por ejemplo

- $$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha_1 \mid \Gamma \vdash \Delta, \alpha_2}$$

Nótese que equivale a anotar, en la presentación arbórea de los tableaux de Beth, como última fórmula de la raíz, la negación de la conclusión por la que nos preguntamos

Cierre

Un subtableau es cerrado si se da una de las opciones siguientes

- $\Gamma, \varphi, \neg\varphi \vdash \Delta$ —se indicará anotando $\bigotimes$—
- $\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \neg\varphi$ —se indicará anotando $\bigotimes$—
- $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$ —se indicará anotando $\bigcirc$—

El tableau es cerrado si todos los subtableaus los son

Movimiento interrogativo: regla **C**

Consulta

El indagador puede consultar al oráculo siempre que la presuposición de la pregunta ocurra en la parte izquierda de la subtabla. Si el oráculo tiene respuesta a la cuestión, entonces ésta se añade a la parte izquierda de la subtabla.

φ es conclusión de Γ en M, si el tableau es cerrado, lo que podemos indicar $M : \Gamma \vdash \varphi$. Es decir, según lo establecido

$$M : \Gamma \vdash \varphi \text{ syss } \Gamma \vdash_M \varphi$$

Lógica interrogativa extendida

Dos nuevas reglas

1. **Regla I-tautología**:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \neg\varphi \vdash \Delta}$$

2. **Regla D-contradicción**:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \wedge \neg\varphi}$$

Nótese que el carácter de espejo de la regla D-contradicción (efecto análogo a la I-tautología)

Sobre generalizaciones 1/4

Modelo M: $D = \{1\}$, $\mathfrak{I}(P) = D$, $\mathfrak{I}(a) = 1$

1	$\exists x Px$	$\forall x Px$
2	**C**: Pa	Pa
3	$\bigcirc$	$\bigcirc$

Nótese que en 2 el indagador consulta al oráculo, pues la presuposición de Pa está en la columna izquierda; dada la respuesta positiva, se incluye y así se cierra la tabla. Luego $\exists x Px \vdash_M \forall x Px$

Sobre generalizaciones 2/4

Modelo M: $D = \{1, 2\}$, $\mathfrak{I}(P) = \{1\}$, $\mathfrak{I}(a) = 1$, $\mathfrak{I}(b) = 2$

1	$\exists x Px$	$\forall x Px$
2	Pa	Pb
3	**C**: -	-

En este caso, aparecen dos constantes distintas por las reglas del tableau; además, el indagador, al consultar al oráculo por Pb, no hay respuesta positiva; no hay cierre. Esto mismo ocurre, en general, cuando $\mathfrak{I}(P) \neq D$

Sobre generalizaciones 3/4

Modelo *M* (uno de los ejemplos anteriores)

1	Pa	$\exists x P x$
2	-	Pa
3	$\bigcirc$	$\bigcirc$

En 2 se instancia con la constante *a* —recuérdese el carácter de espejo de R-D—

Sobre generalizaciones 4/4

Modelo M: $D = \{1, 2\}$, $\Im(P) = \{1\}$, $\Im(a) = 1$, $\Im(b) = 2$.

1	-	Pa	-	$\forall x Px$
2	-	-	-	Pb
3	-	$Pb \vee \neg Pb$	-	-
4	Pb	-	$\neg Pb$	-
5	$\bigcirc$	-	**C**:-	-

Regla espejo D, por lo que se usa la constante b. En 3 regla I-tautología. A pesar de lograr un cierre, la consulta no da una respuesta positiva, con lo que se quedan subtablas abiertas. Lo mismo, aunque no se use I-tautología, cuando $\Im(P) \neq D$.

Otros ejemplos 1/4

$\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists x \neg Qx \vdash_M \exists x \neg Px$. Modelo: $D = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(Q) = \{2, 3\}$

1	-	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$		$\exists x \neg Px$
2	-	$\exists x \neg Qx$	-	-
3	-	$\neg Qa$	-	$\neg Pa$
4	-	$Pa \rightarrow Qa$	-	-
5	$\neg Pa$	-	Qa	-
6	○	-	⊗	○

Cerrada sin consultar el oráculo

Otros ejemplos 2/4

$\forall x(Px \rightarrow Qx); \exists x(Px \wedge Rx) \vdash_M \exists x(Qx \wedge Rx)$, Modelo: M

1	-	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	-	-	$\exists x(Qx \wedge Rx)$	-
2	-	$\exists x(Px \wedge Rx)$	-	-	-	-
3	-	$Pa \wedge Ra$			$Qa \wedge Ra)$	-
4	-	Pa	-	Qa	-	Ra
5	-	Ra	-	-	-	-
6	-	$Pa \rightarrow Qa$	-	-	-	-
7	$\neg Pa$	-	Qa	-	-	-
8	$\otimes$	-	$\bigcirc$	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$

Notese que en la subtabla derecha se abren dos subtablas (en 4), que se cierran con las afirmaciones de la izquierda en 7 y 4 respectivamente, sin consultar M

Otros ejemplos 3/4

$\forall x, yRxy \vdash_M \exists xRxx$. Modelo $D = \{1, 2\}$,
$\Im(R) = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\} = D^2$

$\forall x \forall yRxy$	$\exists xRxx$
$\forall yRay$	Raa
Raa	-
○	○

No se hace consulta al oráculo. Nótese que en la subtabla de la izquierda aparece el literal *Raa* que, por la regla espejo correspondiente en la subtabla derecha, también aparece en ésta

Otros ejemplos 4/4

$\exists x(Px \wedge Qx) \vdash_M \exists xPx \wedge \exists xQx$. Modelo: $D = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{I}(P) = \{1, 2\}$, $\mathfrak{I}(Q) = \{2, 3\}$

1	$\exists x(Px \wedge Qx)$	-	$\exists xPx \wedge \exists xQx$	-
2	$Pa \wedge Qa$	$\exists xPx$	-	$\exists xQx$
3	Pa	Pa	-	Qa
4	Qa	-	-	-
5	$\bigcirc$	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$

La subtabla izquierda se subdivide en dos y aparecen el literal *Pa*, ocurría en la izquierda en 3, y *Qa*, en la izquierda en 4, así la tabla cerrada. No se hace consulta.

Corrección y completud

Para juegos interrogativos extendidos, siendo Φ el conjunto de todas las respuestas disponibles de M, Γ un conjunto de premisas y φ (posiblemente) una conclusión,

Teorema 1

φ se infiere de Γ en M syss cuando el M satisface las fórmulas de Γ y de Φ, entonces también satisface φ. En símbolos

$$M : \Gamma \vdash \varphi \text{ syss } \Phi \cup \Gamma \vdash_M \varphi$$

—se puede anotar $\Gamma \models_M \varphi$, pues $M \models \Phi$ por definición—.

Se prueba en los dos sentidos de acuerdo con las definiciones dadas.

Cuestiones sí-no

Recordemos que una **cuestión proposicional** cuya presuposición tiene la forma $\varphi \vee \neg\varphi$ es una **cuestión sí-no**

Teorema 2

En lógica interrogativa extendida, para un oráculo M, premisas Γ y posible conclusión φ, si $M : \Gamma \vdash \varphi$, entonces φ se puede obtener usando únicamente cuestiones sí-no

Ejemplo de verificación del teorema 2 1/3

$\forall x, y Rxy \vdash_M Raa$, para el M antes indicado,

1	-	$\forall x Rxy$	-	Raa
2	-	$Raa \vee \neg Raa$	-	-
3	Raa	-	$\neg Raa$	-
4	-	-	**C**: Raa	-
5	$\bigcirc$	-	$\otimes$	$\bigcirc$

En 2 se aplica I-tautología; al hacer la consulta en 4 —legitimada por aparecer la presuposición en 2— la respuesta es Raa.

Ejemplo de verificación del teorema 2 2/3

$\forall x Px \vdash_M Pa$, para M en que $\Im(P) = D$,

1		$\forall xPx$	-	Pa
2	-	$Pa \vee \neg Pa$	-	-
3	Pa	-	$\neg Pa$	-
4	-	-	**C**: Pa	-
5	$\bigcirc$	-	$\bigotimes$	$\bigcirc$

Similar al ajemplo anterior

Ejemplo de verificación del teorema 2 3/3

$\exists x Px \vdash_M Pa$, M: $D = \{1, 2, 3\}$, $\Im(P) = \{1, 2\}$, $\Im(a) = 2$, $\Im(b) = 3$.

1	-	$\exists x Px$	-	Pa
2	-	Pb	-	
3	-	$Pa \vee \neg Pa$	-	-
4	Pa	-	$\neg Pa$	-
5	-	-	**C**: Pa	-
6	$\bigcirc$	-	$\otimes$	$\bigcirc$

En 3 se aplica I-tautología, lo que legitima la consulta en 5, cuya respuesta es *Pa*.

Sobre estrategias

Estrategias

Para obtener cierres en las tablas de un juego interrogativo, se pueden presentar distintas estrategias, como

- Dar prioridad a una consulta sobre un movimiento inferencial
- Priorizar la reglas para fórmulas α sobre las β en las subtablas izquierdas (lo recíproco en las derechas)
- Priorizar aplicar las reglas para $\exists$-fórmulas sobre las $\forall$-fórmulas en la misma subtabla izquierda, etc.

La mejor estrategia

Teorema 3 (de estrategia óptima)

En cada juego interrogativo, asumiendo la existencia de respuestas, existe una estrategia óptima para concluirlo.

Si hay respuesta a una cuestión, la presuposición $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ o la presuposición $\exists x \varphi$ serán verdaderas. En el primer caso, la elección óptima es la φ_i que antes lleve al cierre; en el segundo, $\varphi(x/a_i)$, para la constante a_i que antes permita el cierre (inducción sobre el grado de complejidad de las fórmulas correspondientes).

Observación sobre inducción y abducción

En principio, ni la inducción ni la abducción tienen cabida en el juego interrogativo. Sin embargo, en el juego interrogativo extendido se pueden abordar ciertos problemas abductivos. En concreto, la regla de Peirce,

$$\frac{\varphi \rightarrow \chi,\ \chi}{\text{es plausible; } \varphi};$$

queda implícita al añadir las nuevas reglas indicadas I-tautología y D-contradicción.

Un problema abductivo 1/2

M: $D = \{1, 2\}$, $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(Q) = D$, $\mathfrak{I}(a) = 1$, $\mathfrak{I}(b) = 2$.
Problema abductivo: ¿$\forall x(Px \rightarrow Qx)$, $\forall xQx \vdash_M \forall xPx$?

1	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	$\forall xPx$
2	$\forall xQx$	Pb
3	$Pa \rightarrow Qa$	-
4	Qa	-
5	$Pb \vee \neg Pb$	-
6	**C**: Pb	-
7	$\bigcirc$	$\bigcirc$

Nótese que si $\mathfrak{I}(P) = \{1\}$ e $\mathfrak{I}(Q) = D$, no se obtiene $\forall xPx$

Un problema abductivo 2/2

M: $D = \{1,2\}$, $\mathfrak{I}(P) = \{1\}$, $\mathfrak{I}(Q) = \mathfrak{I}(R) = D$, $\mathfrak{I}(a) = 1$.
Problema abductivo: ¿$Pa \rightarrow Qa,\ Qa \rightarrow Ra,\ Ra \vdash_M Pa$?

1	$Pa \rightarrow Qa$	Pa
2	$Qa \rightarrow Ra$	-
3	Ra	-
4	$Pa \vee \neg Pa$	-
5	**C**: Pa	-
6	$\bigcirc$	$\bigcirc$

La consulta tiene respuesta positiva, con lo que se obtiene el cierre.

¿Conclusiones verdaderas probadas en el modelo?

En efecto, si la conclusión es verdadera en M, se prueba a partir de cualquier premisa. Ejemplo: $do(M) = \{1, 2\}$, $\mathfrak{I}(P) = \{1\}$, $\mathfrak{I}(Q) = \{2\}$, $\mathfrak{I}(a) = 1$, $\mathfrak{I}(b) = 2$; $Pa \vdash_M Qb$:

1	-	Pa	-	Qb
2	-	$Qb \vee \neg Qb$	-	-
3	-	**C**: Qb	-	
4	Qb	-	$\neg Qb$	-
5	$\bigcirc$	-	$\otimes$	$\bigcirc$

Sin embargo, $Pa \nvdash_M Qa$, pues al incluir I-tautología —$Qa \vee \neg Qa$—, el oráculo no tiene respuesta positiva a Qa?

Conclusiones 1/3

- El papel de las **tablas semánticas**, como forma de refutación o como constructora de modelos, permite, al proponer la "ludificacion" y convertirlas en reglas de uso del juego interrogativo, fijar **juegos interrogativos**
- Las tablas para juegos interrogativos ayudan a la comprensión de una variedad de nociones lógicas (verdad en un modelo, validez en un modelo, inferencia en un modelo, validez universal, etc.). Cabe afirmar que estos métodos se presentan como útiles herramientas para la **enseñaza de la lógica** tras asumir unas nociones básicas

Conclusiones 2/3

- Los juegos interrogativos deben **compararse** con juegos lógicos de dos jugadores activos. En el caso de los juegos dialógicos, se han examinado relaciones de juegos a la GTS con diálogos de fórmulas y un número finito de hipótesis. También se podrán equiparar juego interrogativo y diálogo con ciertas condiciones
- La idea de movimientos estratégicos permite formular un (meta)teorema sobre estrategia, en la línea de responder a la importante cuestión **¿Cual es la elección óptima en un juego interrogativo, en un juego lógico en general?**

Conclusiones 3/3

- Mediante el uso de lenguajes adecuados, se pueden plantear juegos interrogativos modales, epistémicos, deónticos, etc.
- Los tableaux para juegos interrogativos (extendidos) constituyen un **método unificado de representación** de argumentaciones de diverso tipo (deducción, deducción en un modelo y abducción)
- Se puede abordar el estudio de la inferencia científica y la importante cuestión de si es posible una **lógica del descubrimiento** —mejor, lógicas, en plural—

Bibliografía básica 1/2

- J. van Benthem (2006): “Logical Construction Games”, en *Acta Philosophica Fennica*, vol. 78: 123-137
- J. van Benthem (2011): *Logical Dynamics of Information and Interaction*, Cambridge University Press
- L. T. F Gamut (1991): *Logic, Language and Meaning* vol. I, The University of Chicago Press
- J. Hintikka (1999): *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery*, Jaakko Hintikka Selected Papers vol. 5, Kluwer

Bibliografía básica 2/2

- S. Rahman & C. Dégremont (2006): “The Beetle in the Box: Exploring IF-Dialogues”, en *Acta Philosophica Fennica*, vol. 78: 91-122
- J. Redmond & M. Fontaine (2011): *How to Play Dialogues. An Introduction to Dialogical Logic*, College Publications
- L. Wittgenstein (2003): *Investigaciones filosóficas*, Trad. A. García Suárez y U. Moulines U. N. A. M. Instituto de Investigaciones Filosóficas