Tema 15: Métodos de Intersección

PÉREZ ROMERO, A.M.

DTO. DE INGENIERÍA GRÁFICA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Topografía / Curso 2021-2022

TRIANGULACIÓN TOPOGRÁFICA (MÉTODOS DE INTERSECCIÓN)

1. BIBLIOGRAFÍA …………………………………………………………… 3
2. CONOCIMIENTOS BÁSICOS ………………………………………….... 4
3. CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS TOPOGRÁFICOS …………... 12
4. DEFINICIÓN DE TRIANGULACIÓN TOPOGRÁFICA ……………….. 13
5. APLICACIONES ……………………………………………………….. 14
6. CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE INTERSECCIÓN ……….. 15
7. INTERSECCIÓN DIRECTA …………………………………………… 16
8. INTERSECCIÓN INVERSA ……………………………………………22

1. **BIBLIOGRAFÍA**

DOMINGUEZ GARCIA-TEJERO
Topografía general y aplicada. Capítulo 10

MARTÍN MOREJÓN
Topografía y replanteos (I). Lección 12

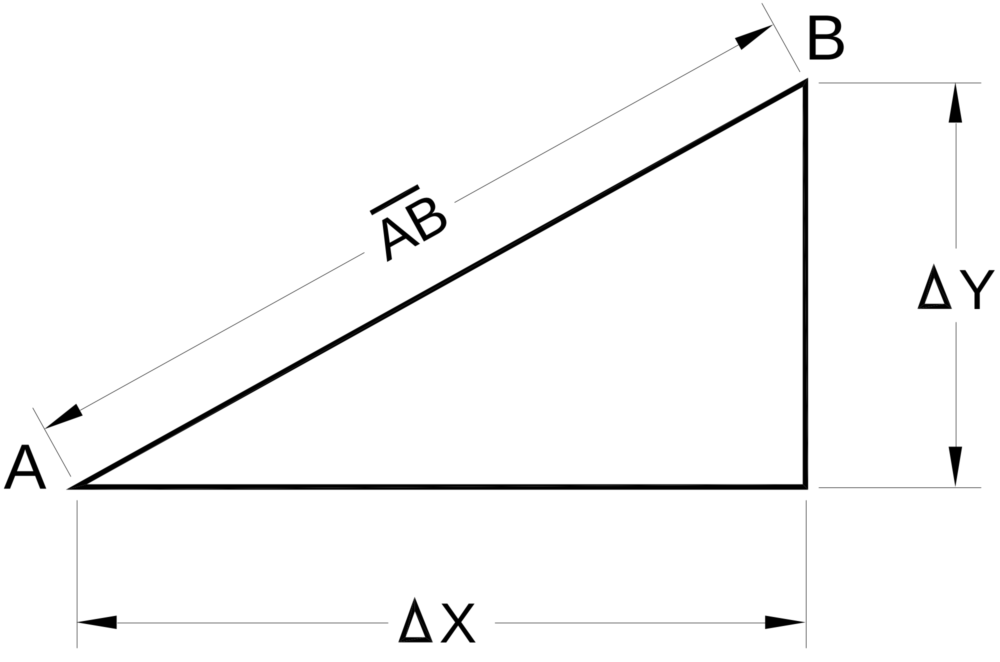
LÓPEZ CUERVO
Topografía. Capítulo VII

CHUECA PAZOS
Métodos topográficos /Tratado de Topografía 2
Tercera parte, capítulos 1 y 2.

2. **CONOCIMIENTOS BÁSICOS**

- Calculo de la distancia entre dos puntos conocidas sus coordenadas cartesianas (X, Y).
- Cálculo del acimut de una alineación conocidas las coordenadas cartesianas de sus extremos.
- Cálculo de las coordenadas cartesianas de puntos, conocidas las coordenadas cartesianas del punto de partida, las distancias y los acimutes de las alineaciones.
- Teorema del seno.
- Teorema del coseno.
- Suma de los ángulos interiores de un polígono.
- Seno de una diferencia: Sen (a-b)

Cálculo de la distancia entre dos puntos, conocidas sus coordenadas cartesianas (X, Y)

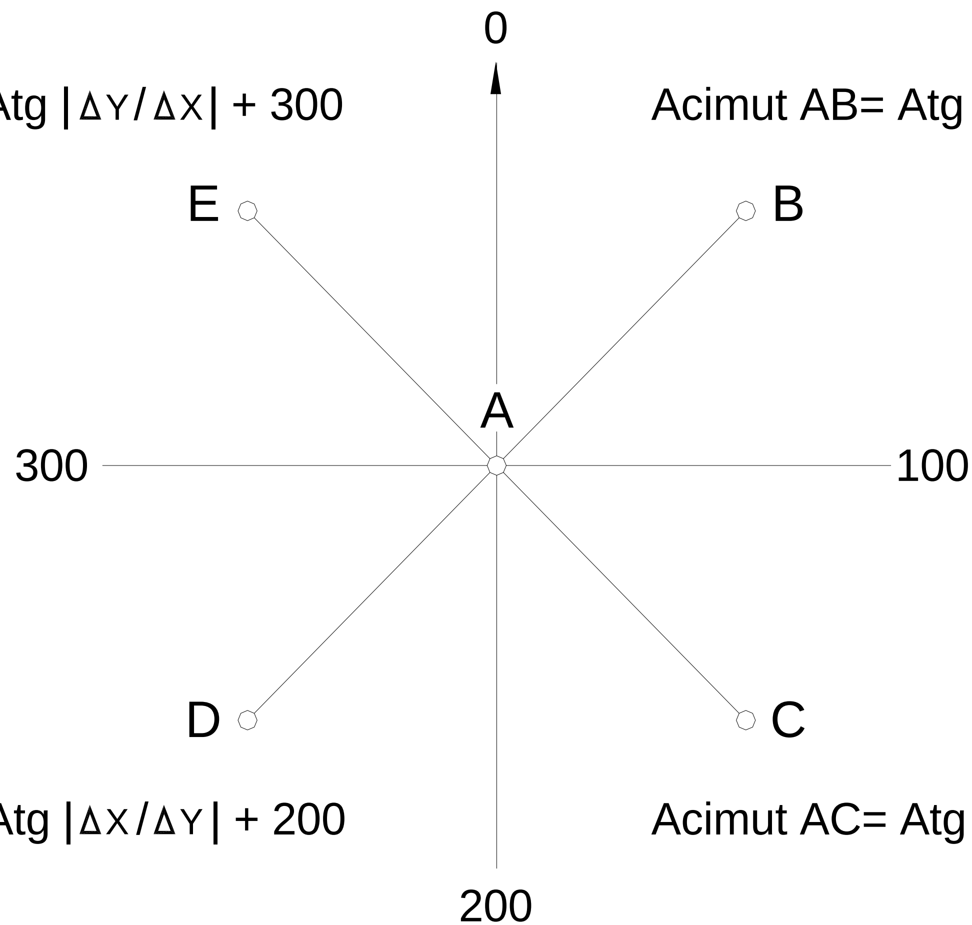


$$\overline{AB}=\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

Cálculo del acimut de una alineación conocidas las coordenadas cartesianas de sus extremos

Acimut AE= $\mathrm{Atg}\ |\Delta Y/\Delta X| + 300$

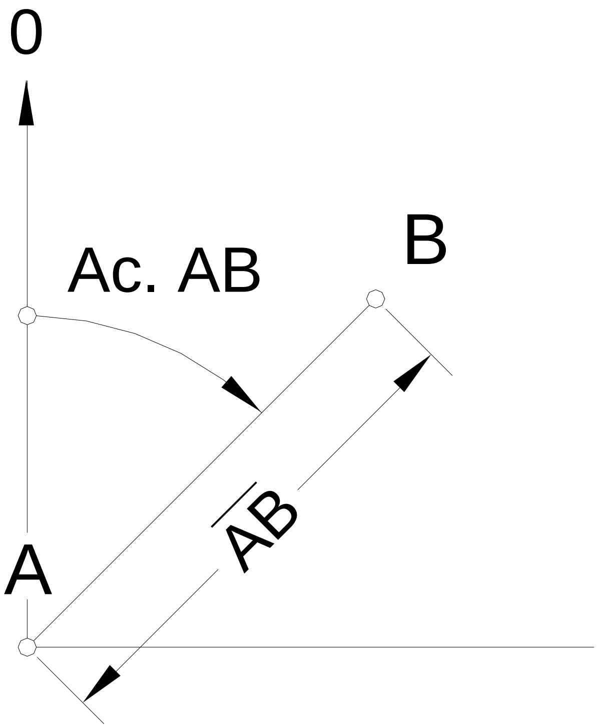
Acimut AB= $\mathrm{Atg}\ |\Delta X/\Delta Y|$



Acimut AD= $\mathrm{Atg}\ |\Delta X/\Delta Y| + 200$

Acimut AC= $\mathrm{Atg}\ |\Delta Y/\Delta X| + 100$

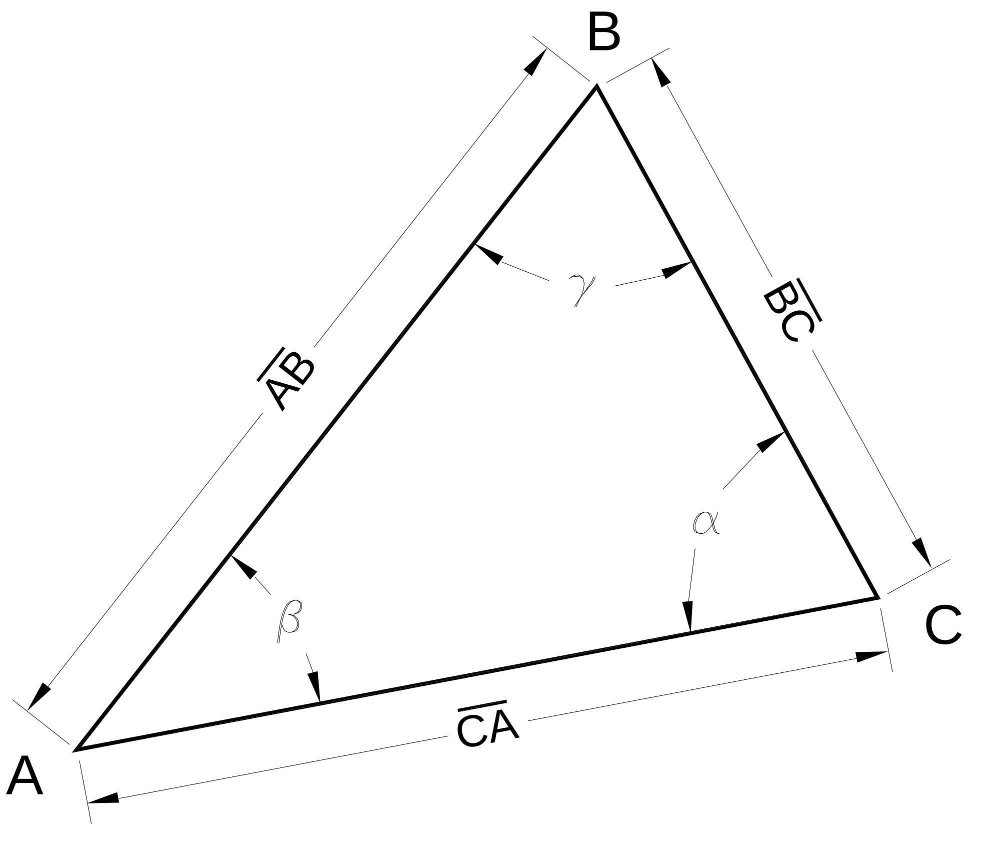
Cálculo de las coordenadas cartesianas de puntos, conocidas las coordenadas cartesianas del punto de partida, las distancias y los acimutes de las alineaciones



$$X_B = X_A + \overline{AB} \times \text{Seno (Ac. AB)}$$

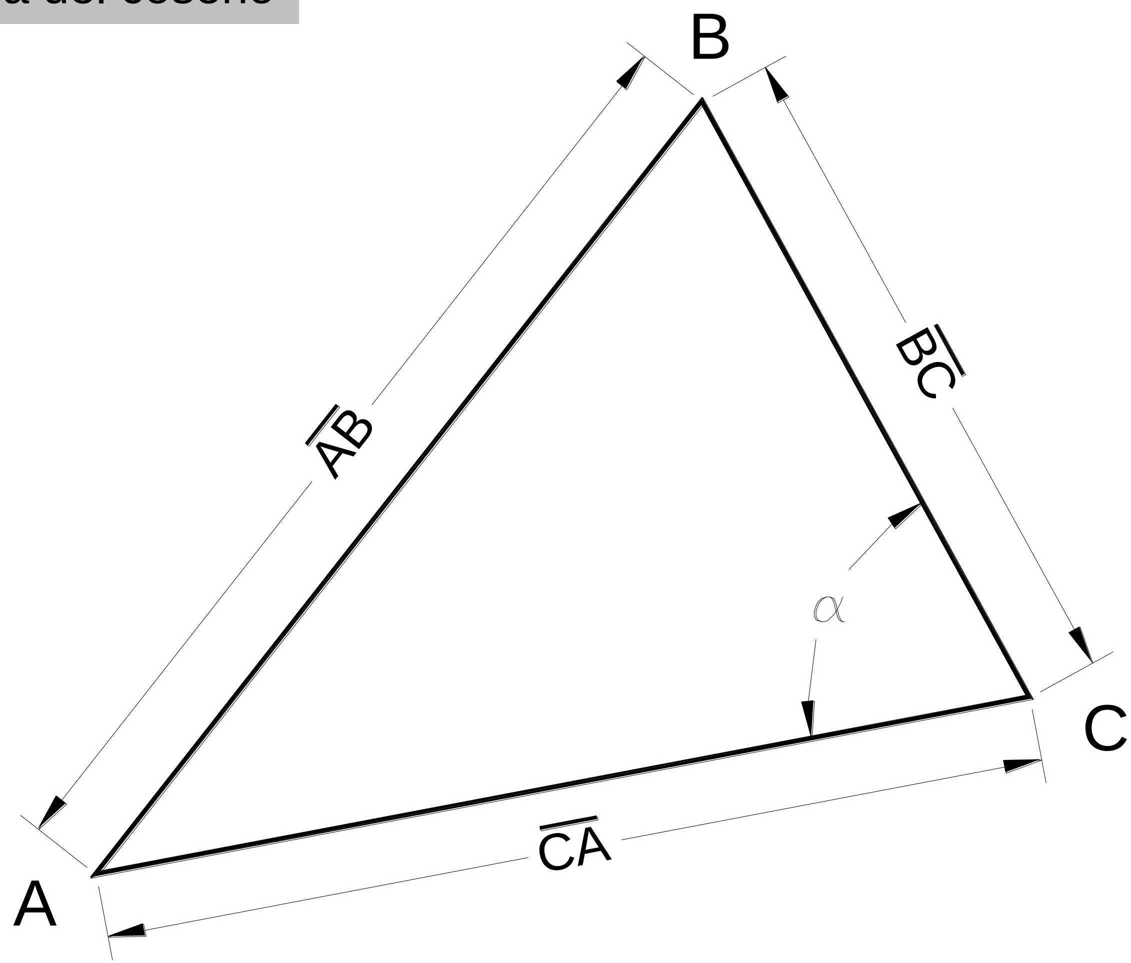
$$Y_B = Y_A + \overline{AB} \times \text{Coseno (Ac. AB)}$$

Teorema del seno



$$\frac{\overline{AB}}{\text{Seno }\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\text{Seno }\beta} = \frac{\overline{CA}}{\text{Seno }\gamma}$$

Teorema del coseno

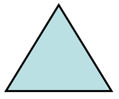


$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CA} \times \text{Coseno } \alpha$$

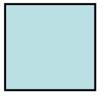
$$\alpha = \text{Arco coseno } [(\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{AB}^2) / (2 \times \overline{BC} \times \overline{CA})]$$

Suma de los ángulos interiores de un polígono

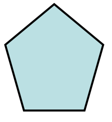
Suma = 200 x (Nº de lados del polígono – 2)



200 x (3 – 2) = 200



200 x (4 – 2) = 400



200 x (5 – 2) = 600

Seno de una diferencia

Sen (a-b)= Sen a x Cos b – Cos a x Sen b

3. **CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS TOPOGRÁFICOS**

- Nivelación.
- Radiación simple.
- Radiación compuesta.
- Itinerario.
- **Triangulación topográfica (métodos de intersección).**
- GPS - GNSS.

4. **DEFINICIÓN DE TRIANGULACIÓN TOPOGRÁFICA**

La TRIANGULACIÓN TOPOGRÁFICA consiste en establecer una red de triángulos sobre una zona con objeto de realizar su medición. Los citados triángulos se calculan trigonométricamente y se dan coordenadas a todos los vértices de la red.

El método de trabajo al que recurre la Triangulación Topográfica es el de INTERSECCIÓN, método en el que, partiendo de unos datos de líneas base (coordenadas de vértices y longitudes) y mediante la observación EXCLUSIVA de ÁNGULOS, podemos calcular las distancias a nuevos puntos y, por supuesto, coordenadas cartesianas.

5. **APLICACIONES**

- **Cálculo de puntos de apoyo para radiaciones e itinerarios**: El método de Itinerario, combinado con Radiaciones solo puede cubrir un cierto límite en cuanto a superficie, a partir del cual, la acumulación de errores rebasa todas las tolerancias establecidas, de modo que se hace necesaria la utilización de otros métodos más fiables para la medición de largas distancias (métodos de Intersección y GNSS) para dar coordenadas a puntos que utilizaremos en posteriores itinerarios y radiaciones.

- **Cartografía y Geodesia**: Los métodos de intersección resultan especialmente útiles cuando debemos calcular coordenadas de puntos en un sistema de proyección Conforme (UTM).

- **Medición de puntos inaccesibles**: Puesto que las distancias y coordenadas de puntos se obtienen mediante la observación **exclusiva** de **ángulos**, podemos medir sin necesidad de colocar miras o prismas en los puntos observados.

http://www.madridejos.net/geodesico/

https://www.geamap.com/es/tematica/vertices-geodesicos

6. **CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE INTERSECCIÓN**

Intersección DIRECTA

- SIMPLE
- MÚLTIPLE → Trisección Directa

Intersección INVERSA

- POTHENOT / Trisección Inversa / Problema de la Carta
- HANSEN

Intersección MIXTA

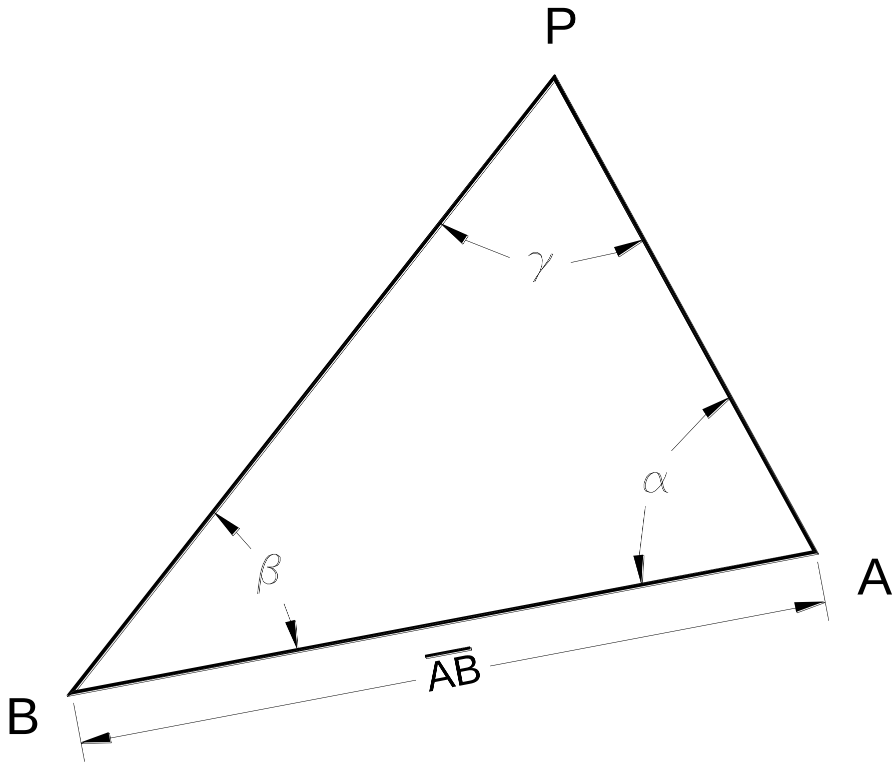
7. **INTERSECCIÓN DIRECTA**

Estacionamos sobre puntos de coordenadas conocidas y realizamos observaciones a vértices de coordenadas desconocidas.

7.1. INTERSECCIÓN DIRECTA SIMPLE

Partimos del conocimiento de las coordenadas de los extremos de una línea base (definida por los puntos A y B del dibujo, y por lo tanto de su longitud y orientación. Para determinar las coordenadas del punto observado (P), nos estacionamos en los extremos de la base y medimos el ángulo horizontal comprendido entre las alineaciones estación-punto observado y estación-extremo opuesto de la línea base. Una vez obtenidos los dos valores angulares (α y β), mediante cálculos trigonométricos, podemos deducir todas las distancias y acimutes necesarios para lograr las coordenadas del punto observado.

RESOLUCIÓN



DATOS:

Coordenadas X e Y de los puntos A y B

Ángulos α y β

CÁLCULOS INTERMEDIOS:

Distancia $\overline{AB}$ (por Pitágoras)

Ángulo γ = 200 - (α+ β)

Distancia $\overline{AP}$= ($\overline{AB}$ x Seno β)/ Seno γ

Acimut AB

Acimut AP= Acimut AB + α

CÁLCULOS FINALES:

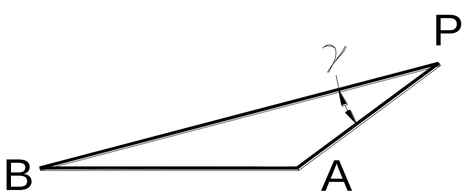
$X_P = X_A + \overline{AP}$ x Seno (Ac. AP)

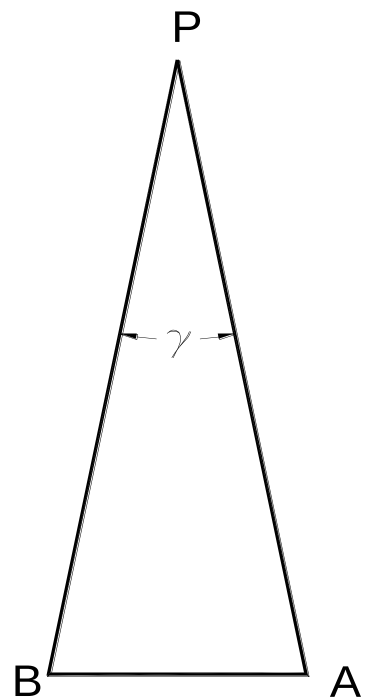
$Y_P = Y_A + \overline{AP}$ x Coseno (Ac. AP)

LIMITACIONES DEL MÉTODO

El ángulo γ debe estar comprendido entre 25^g y 175^g , ya que fuera de este rango, cualquier pequeño error en la medición de un ángulo puede provocar una desviación excesivamente grande en la resolución del punto.

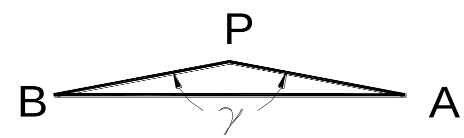
Punto P demasiado inclinado con respecto a la base





Punto P demasiado alejado de la base

Punto P demasiado próximo a la base

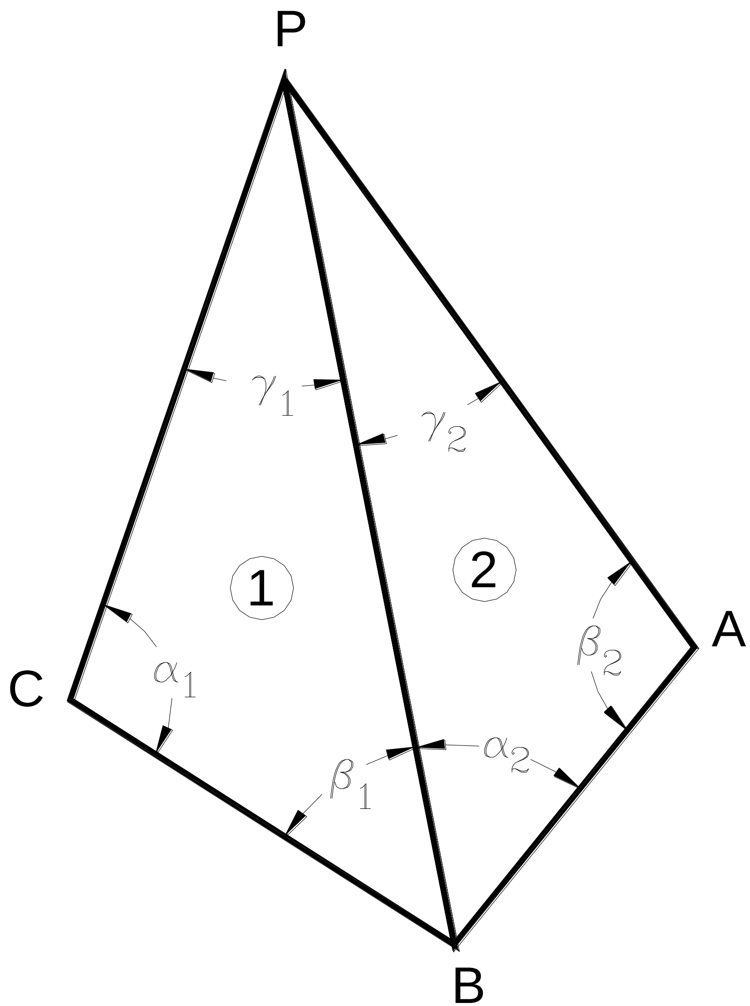


7.2. INTERSECCIÓN DIRECTA MÚLTIPLE → TRISECCIÓN DIRECTA

Partimos del conocimiento de las coordenadas de tres puntos que fijan dos líneas base (definida una por los puntos A-B y otra por los puntos B-C).

Para determinar las coordenadas del punto observado (P), nos estacionamos en los extremos de las bases y medimos el ángulo horizontal comprendido entre las alineaciones estación-punto observado y estación-extremo opuesto de la línea base. Una vez obtenidos los cuatro valores angulares (α_1, β_1, α_2 y β_2), mediante operaciones trigonométricas, podemos deducir todas las distancias y acimutes necesarios para obtener las coordenadas del punto observado.

RESOLUCIÓN



DATOS:

Coordenadas X e Y de los puntos A, B y C

Ángulos α_1 , β_1 , α_2 y β_2

CÁLCULOS INTERMEDIOS:

Distancias AB y BC (por Pitágoras)

Ángulo $\gamma_1 = 200 - (\alpha_1 + \beta_1)$

Ángulo $\gamma_2 = 200 - (\alpha_2 + \beta_2)$

Distancia $\overline{BP}$ (por partida doble)

$\overline{BP}_2 = (\overline{AB} \times \text{Seno}\, \beta_2) / \text{Seno}\, \gamma_2$

$\overline{BP}_1 = (\overline{BC} \times \text{Seno}\, \alpha_1) / \text{Seno}\, \gamma_1$

$\overline{BP} = (\overline{BP}_1 + \overline{BP}_2) / 2$

Acimut BC

Acimut BP= Acimut BC + β_1

CÁLCULOS FINALES:

$X_P = X_B + \overline{BP} \times \text{Seno (Ac. BP)}$

$Y_P = Y_B + \overline{BP} \times \text{Coseno (Ac. BP)}$

TOLERANCIA

La diferencia entre las distancias $\overline{BP}_1$ (distancia $\overline{BP}$ calculada por resolución del triángulo 1) y $\overline{BP}_2$ (distancia $\overline{BP}$ calculada por resolución del triángulo 2) será el error lineal cometido.

La tolerancia se establecerá teniendo en cuenta la escala a la que debemos representar el trabajo y fijando el límite de percepción visual en 0,0002 m.

Tolerancia = (0,0002 x Denominador de la escala) metros.

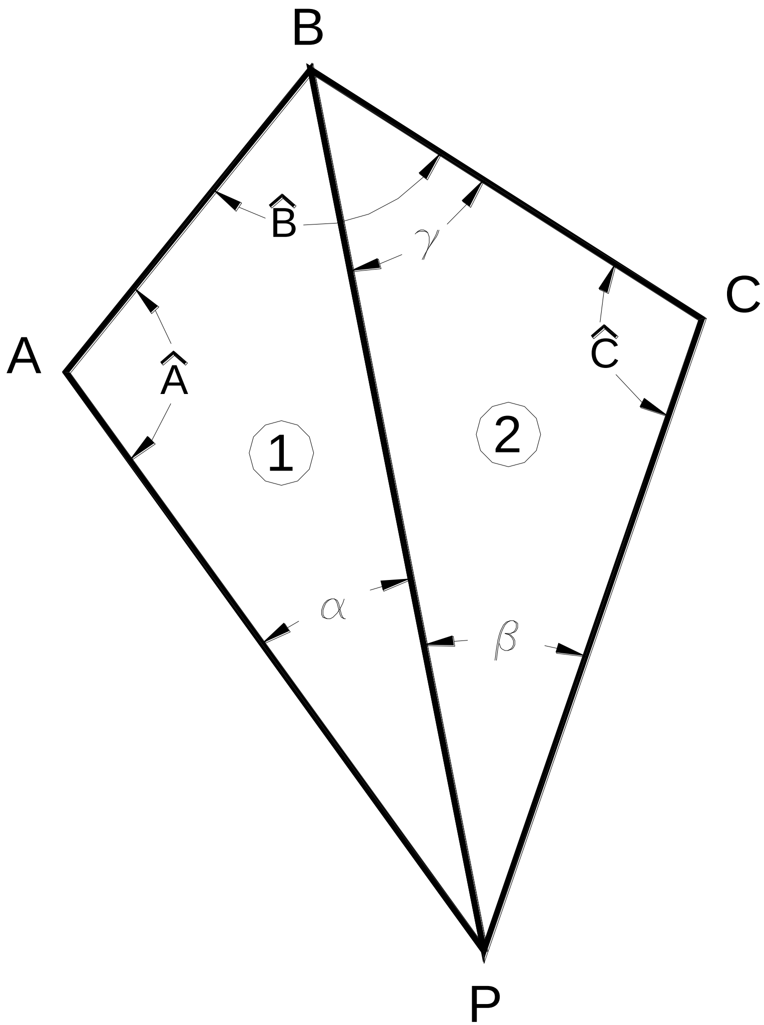
8. **INTERSECCIÓN INVERSA**

Estacionamos sobre puntos de coordenadas desconocidas y realizamos observaciones a vértices de coordenadas conocidas.

8.1. TRISECCIÓN INVERSA / **POTHENOT** / PROBLEMA DE LA CARTA

Necesitamos calcular las coordenadas de un punto (**P**) y para ello nos estacionamos en dicho punto y medimos ángulos horizontales visando a tres puntos de coordenadas conocidas (**A**, **B** y **C**).

RESOLUCIÓN



DATOS:

Coordenadas X e Y de los puntos A, B y C
Ángulos α y β

CÁLCULOS INTERMEDIOS:

Distancias AB y BC (por Pitágoras)

$\overline{BP} = (\overline{AB} \times \text{Seno } \hat{A})/ \text{Seno } \alpha$

$\overline{BP} = (\overline{BC} \times \text{Seno } \hat{C})/ \text{Seno } \beta$

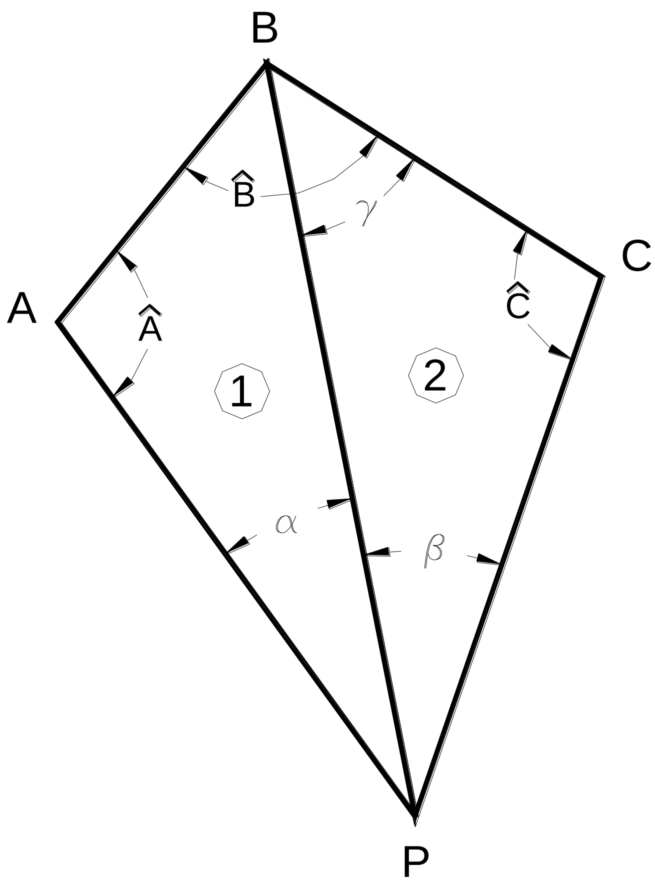
$(\overline{AB} \times \text{Seno } \hat{A})/ \text{Seno } \alpha = (\overline{BC} \times \text{Seno } \hat{C})/ \text{Seno } \beta$

$\text{Seno } \hat{A} / \text{Seno } \hat{C} = (\overline{BC} \times \text{Seno } \alpha) / (\overline{AB} \times \text{Seno } \beta) = K$

$\text{Seno } \hat{A} / \text{Seno } \hat{C} = K$

Acimutes BC y BA
Ángulo $\hat{B}$ = "Acimut BA - Acimut BC"

Ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$
$\hat{A} + \hat{C} = 400 - (\alpha + \beta + \hat{B}) = S$
$\hat{C} = S - \hat{A}$



Seno $\hat{A}$ / Seno (S - $\hat{A}$) = K

Seno $\hat{A}$ = (K x Seno S x Coseno $\hat{A}$) - (K x Coseno S x Seno $\hat{A}$)

(1 + K x Coseno S) x Seno $\hat{A}$ = K x Seno S x Coseno $\hat{A}$

Seno $\hat{A}$ / Coseno $\hat{A}$ = Tangente $\hat{A}$ = (K x Seno S) / (1 + K x Coseno S)

$\hat{A}$ = Arco tangente [(K x Seno S) / (1 + K x Coseno S)] *

$\hat{C}$ = S - $\hat{A}$

Distancia $\overline{BP}$ (por partida doble)

$\overline{BP}$ = ($\overline{AB}$ x Seno $\hat{A}$)/ Seno α

$\overline{BP}$ = ($\overline{BC}$ x Seno $\hat{C}$)/ Seno β

$\overline{BP}$ = ($\overline{BP}_1$ + $\overline{BP}_2$) / 2

Acimut BC

γ = 200 - ($\hat{C}$ + β)

Acimut BP= Acimut BC + γ

CÁLCULOS FINALES:

$X_P = X_B + \overline{BP}$ x Seno (Ac. BP)

$Y_P = Y_B + \overline{BP}$ x Coseno (Ac. BP)

** Si A < 0, le sumamos 200g al valor obtenido.*

TOLERANCIA

La diferencia entre las distancias $\overline{BP}_1$ (distancia $\overline{BP}$ calculada por resolución del triángulo 1) y $\overline{BP}_2$ (distancia $\overline{BP}$ calculada por resolución del triángulo 2) será el error lineal cometido.

La tolerancia se establecerá teniendo en cuenta la escala a la que debemos representar el trabajo y fijando el límite de percepción visual en 0,0002 m.

Tolerancia = (0,0002 x Denominador de la escala) metros.

INDETERMINACIÓN

Cuando el valor S es igual a 200^g, el problema presenta una indeterminación, ya que tiene infinitas soluciones.

SOLUCIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA DE POTHENOT

Una de las soluciones gráficas al problema de POTHENOT consiste en trazar el arco capaz del segmento $\overline{AB}$ y el ángulo α para hallar la intersección con el arco capaz del segmento $\overline{BC}$ y el ángulo β.

Dicha intersección nos dará la localización del punto P.

Definición de arco capaz

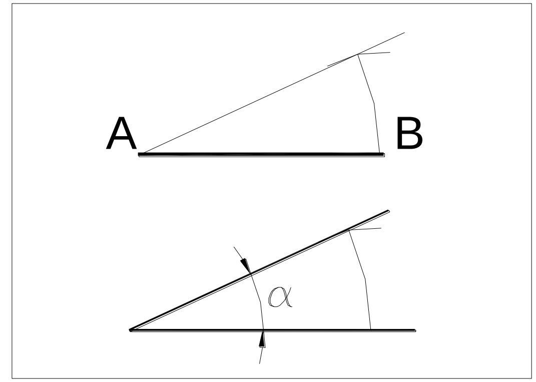
Lugar geométrico de los puntos del plano que abarcan un segmento dado bajo un ángulo dado.

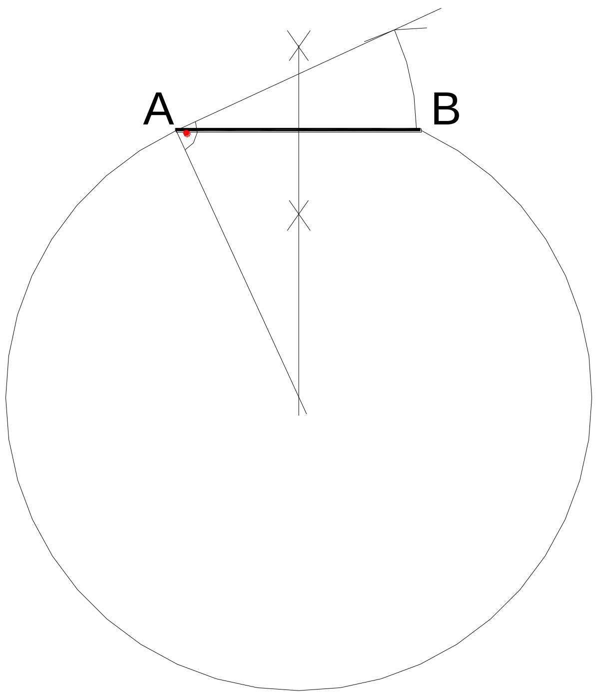
Método para trazar un arco capaz

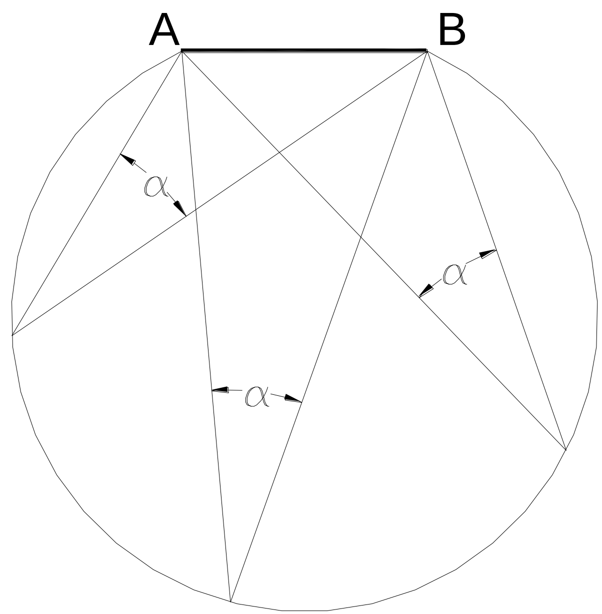
Datos:

Segmento AB

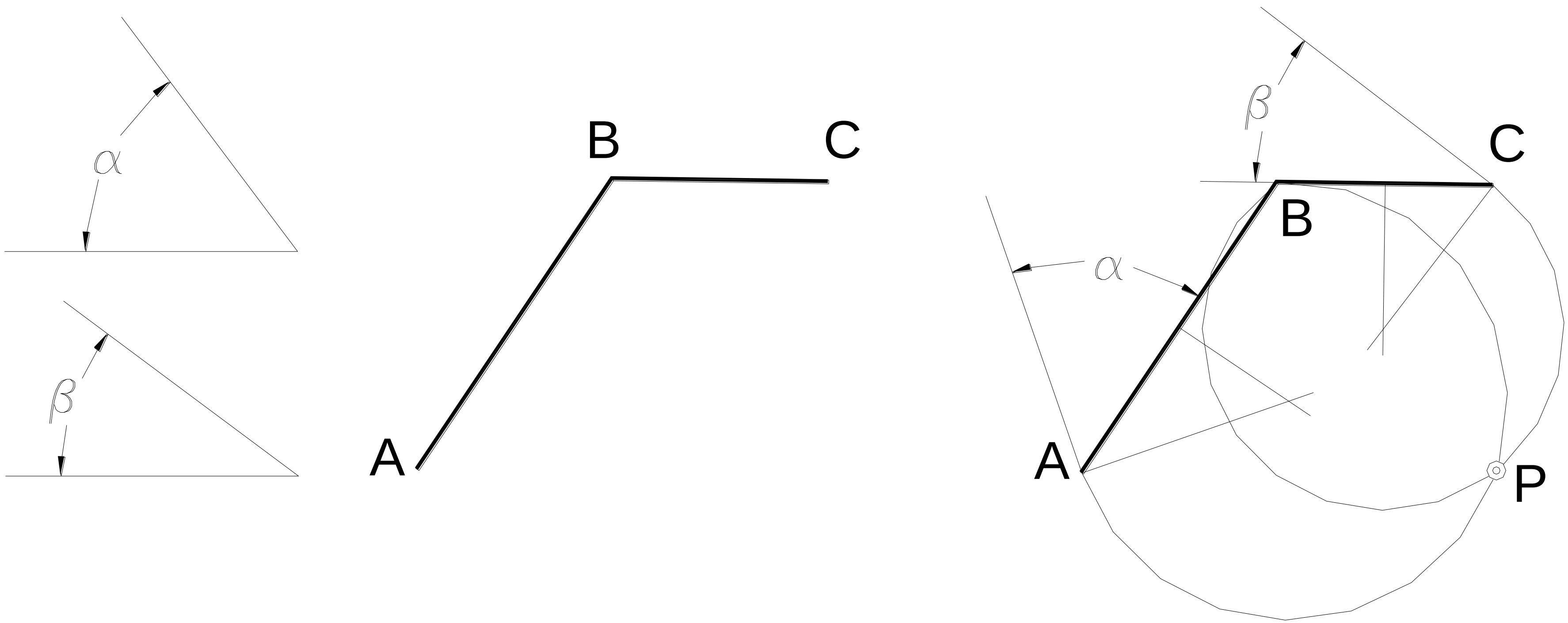
Ángulo α







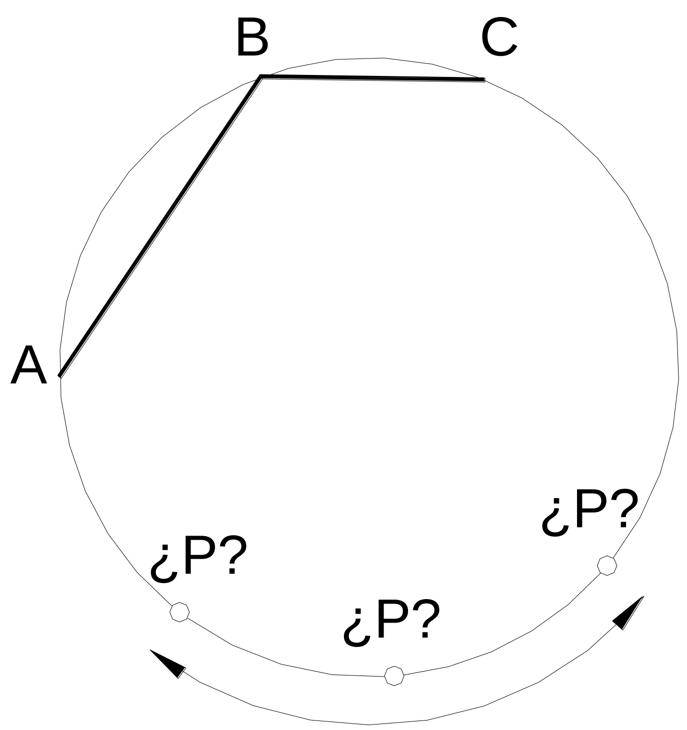
Ejemplo de resolución gráfica



INDETERMINACIÓN

Como decíamos en la solución analítica del problema, cuando el valor S es igual a 200^g, el problema presenta una indeterminación, ya que tiene infinitas soluciones.

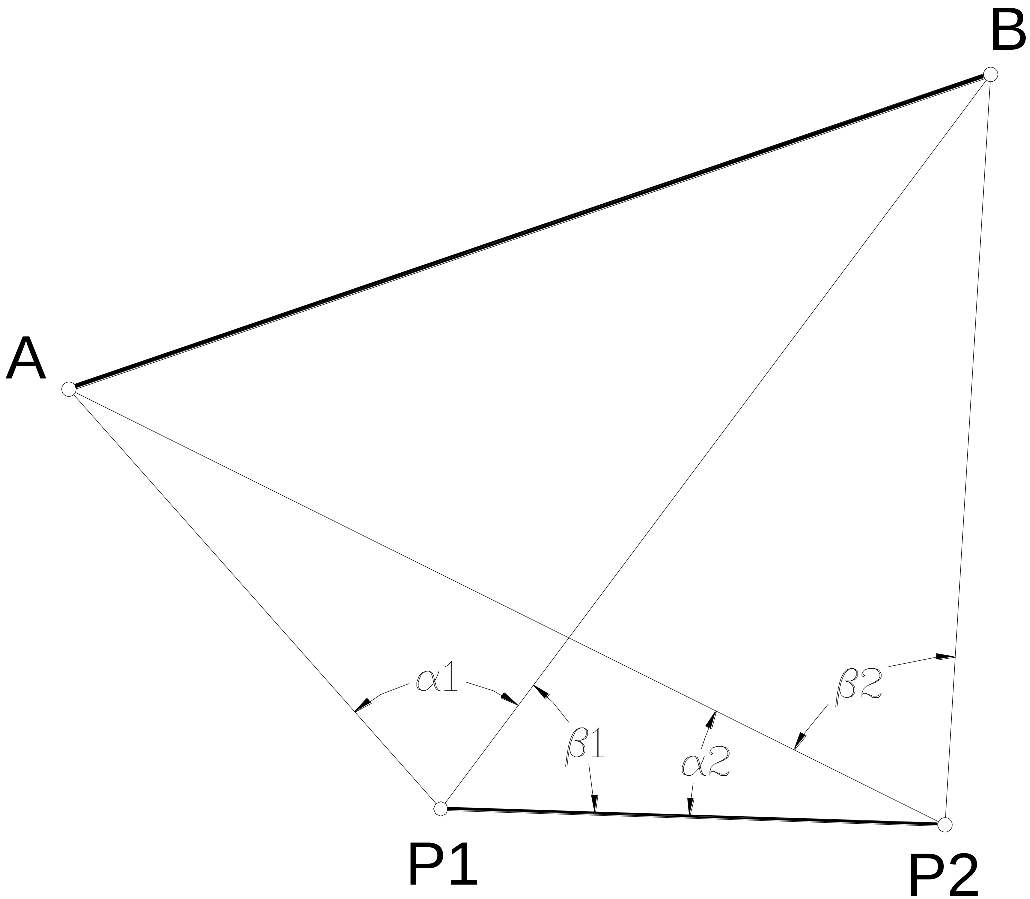
Esto, traducido a su expresión gráfica, quiere decir que los tres puntos de coordenadas conocidas (A, B y C), así como el punto cuya posición queremos determinar (P) están situados sobre la misma circunferencia.



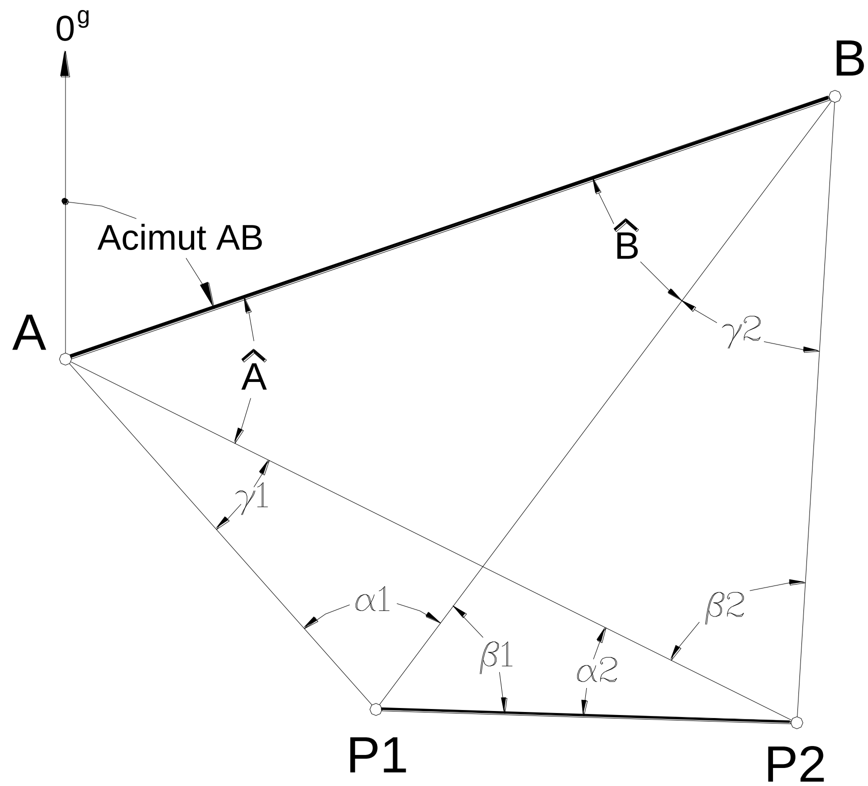
8.2. PROBLEMA DE HANSEN

En este caso, necesitamos obtener las coordenadas de un punto (**P1**), pero únicamente contamos con dos puntos de coordenadas conocidas (**A** y **B**).

Esto nos obliga a añadir un punto auxiliar sobre el que estacionarnos (**P2**) y a tomar cuatro valores angulares en campo (α1, β1, α2 y β2).



RESOLUCIÓN



DATOS:

Coordenadas X e Y de los puntos A y B

Ángulos $\alpha 1$, $\beta 1$, $\alpha 2$ y $\beta 2$

CÁLCULOS INTERMEDIOS:

Distancia AB (por Pitágoras)

Acimut AB

$\gamma 1 = 200 - (\alpha 1 + \beta 1 + \alpha 2)$

$\gamma 2 = 200 - (\beta 1 + \alpha 2 + \beta 2)$

Ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$:

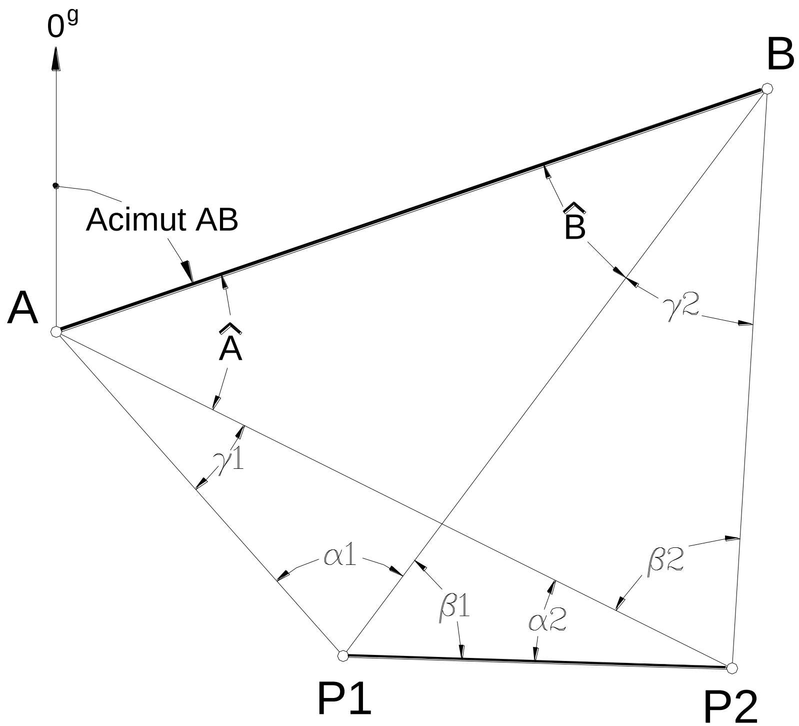
$$\frac{\overline{A\text{-}B}}{\overline{A\text{-}P1}} = \frac{\text{Seno } \alpha 1}{\text{Seno } \hat{B}} \quad \text{(Triángulo A-B-P1)}$$

$$\frac{\overline{A\text{-}P1}}{\overline{P1\text{-}P2}} = \frac{\text{Seno } \alpha 2}{\text{Seno } \gamma 1} \quad \text{(Triángulo A-P2-P1)}$$

$$\frac{\overline{P1\text{-}P2}}{\overline{P2\text{-}B}} = \frac{\text{Seno } \gamma 2}{\text{Seno } \beta 1} \quad \text{(Triángulo P1-B-P2)}$$

$$\frac{\overline{P2\text{-}B}}{\overline{A\text{-}B}} = \frac{\text{Seno } \hat{A}}{\text{Seno } \beta 2} \quad \text{(Triángulo P2-A-B)}$$

RESOLUCIÓN



Si multiplicamos miembro a miembro las 4 ecuaciones:

$$\frac{\cancel{\overline{A\text{-}B}}}{\cancel{\overline{A\text{-}P1}}} = \frac{\text{Seno } \alpha 1}{\text{Seno } \hat{B}} \quad \text{(Triángulo A-B-P1)}$$

$$\frac{\cancel{\overline{A\text{-}P1}}}{\cancel{\overline{P1\text{-}P2}}} = \frac{\text{Seno } \alpha 2}{\text{Seno } \gamma 1} \quad \text{(Triángulo A-P2-P1)}$$

$$\frac{\cancel{\overline{P1\text{-}P2}}}{\cancel{\overline{P2\text{-}B}}} = \frac{\text{Seno } \gamma 2}{\text{Seno } \beta 1} \quad \text{(Triángulo P1-B-P2)}$$

$$\frac{\cancel{\overline{P2\text{-}B}}}{\cancel{\overline{A\text{-}B}}} = \frac{\text{Seno } \hat{A}}{\text{Seno } \beta 2} \quad \text{(Triángulo P2-A-B)}$$

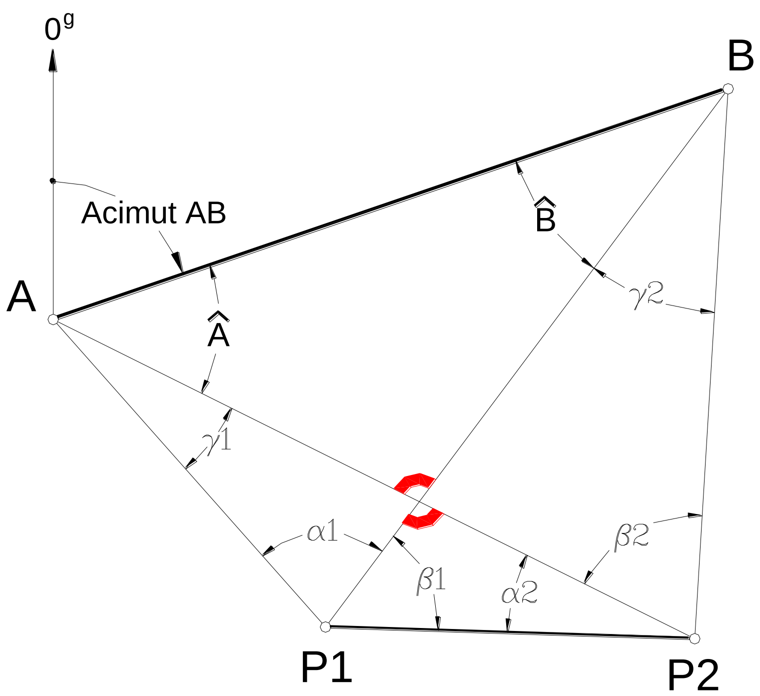
Nos queda:

$$1 = \frac{\text{Seno } \alpha 1 \text{ x Seno } \alpha 2 \text{ x Seno } \gamma 2 \text{ x Seno } \hat{A}}{\text{Seno } \gamma 1 \text{ x Seno } \beta 1 \text{ x Seno } \beta 2 \text{ x Seno } \hat{B}}$$

$$\frac{\text{Seno } \hat{A}}{\text{Seno } \hat{B}} = \boxed{\frac{\text{Seno } \gamma 1 \text{ x Seno } \beta 1 \text{ x Seno } \beta 2}{\text{Seno } \alpha 1 \text{ x Seno } \alpha 2 \text{ x Seno } \gamma 2} = K}$$

$$\frac{\text{Seno } \hat{A}}{\text{Seno } \hat{B}} = K$$

RESOLUCIÓN



$$\frac{\text{Seno } \hat{A}}{\text{Seno } \hat{B}} = K$$

$$\hat{A} + \hat{B} = \beta 1 + \alpha 2 = S$$

$$\hat{B} = S - \hat{A}$$

$$\frac{\text{Seno } \hat{A}}{\text{Seno } (S-\hat{A})} = K$$

$$\text{Seno } \hat{A} = (K \text{ x Seno } S \text{ x Coseno } \hat{A}) - (K \text{ x Coseno } S \text{ x Seno } \hat{A})$$

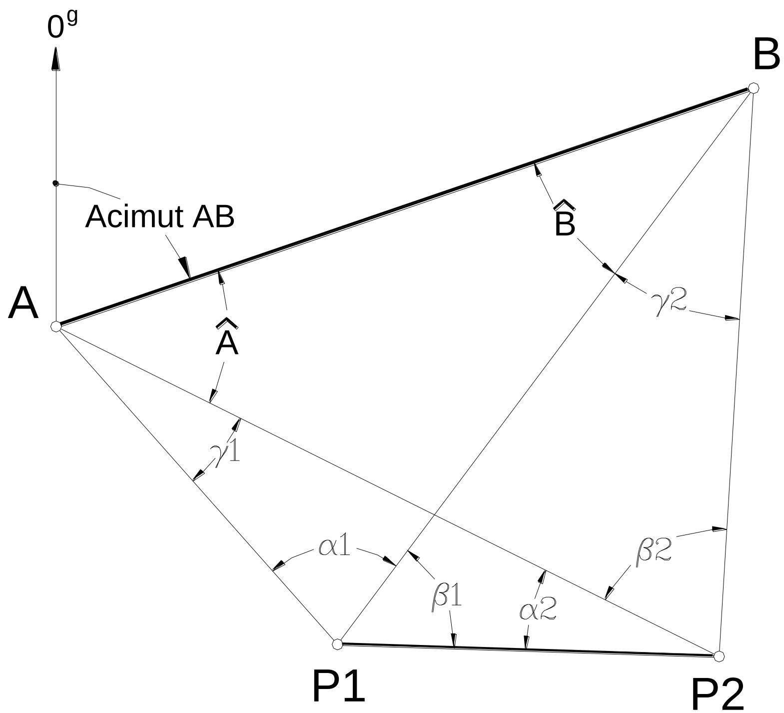
$$(1 + K \text{ x Coseno } S) \text{ x Seno } \hat{A} = K \text{ x Seno } S \text{ x Coseno } \hat{A}$$

$$\frac{\text{Seno } \hat{A}}{\text{Coseno } \hat{A}} = \text{Tangente } \hat{A} = \frac{K \text{ x Seno } S}{1 + K \text{ x Coseno } S}$$

$$\hat{A} = \text{Arco tangente} \left[\frac{K \text{ x Seno } S}{1 + K \text{ x Coseno } S} \right]$$

$$\hat{B} = S - \hat{A}$$

RESOLUCIÓN



Acimut AP2 = Acimut AB + $\hat{A}$

Acimut AP1 = Acimut AB + $\hat{A}$ + $\gamma 1$

$$\overline{A\text{-}P1} = \frac{\overline{A\text{-}B} \times \text{Seno } \hat{B}}{\text{Seno } \alpha 1}$$ (Triángulo A-B-P1)

$$\overline{A\text{-}P2} = \frac{\overline{A\text{-}B} \times \text{Seno } (\hat{B} + \gamma 2)}{\text{Seno } \beta 2}$$ (Triángulo A-B-P2)

$X_{P1} = X_A$ + AP1 x Seno Acimut AP1

$Y_{P1} = Y_A$ + AP1 x Coseno Acimut AP1

$X_{P2} = X_A$ + AP2 x Seno Acimut AP2

$Y_{P2} = Y_A$ + AP2 x Coseno Acimut AP2

TOLERANCIA

La tolerancia se establecerá teniendo en cuenta la escala a la que debemos representar el trabajo y fijando el límite de percepción visual en 0,0002 m.

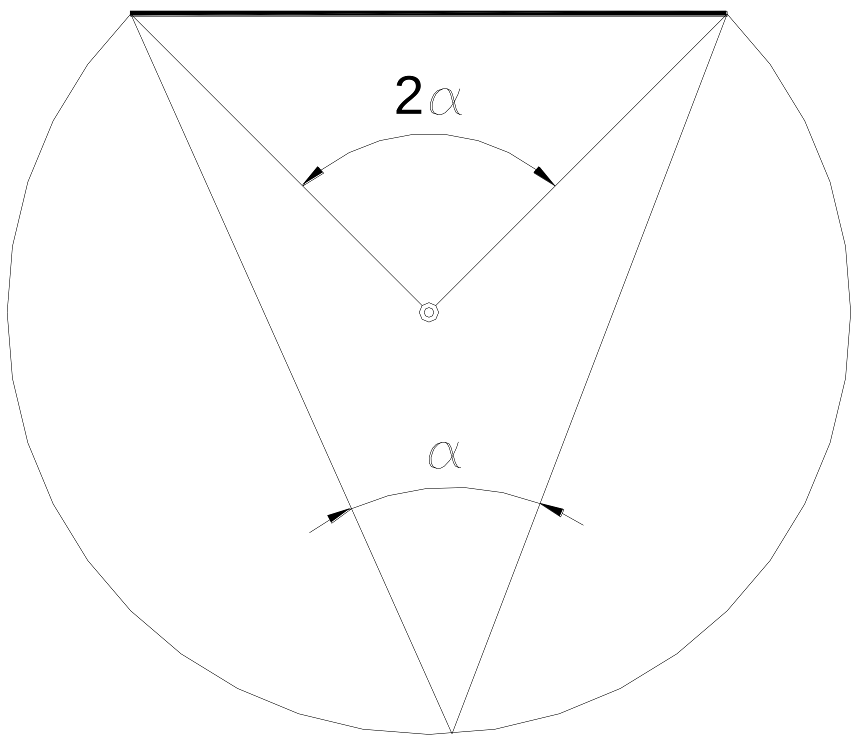
Tolerancia = (0,0002 x Denominador de la escala) metros.

Para poder determinar los errores cometidos, tendríamos que calcular las coordenadas de **P1** y **P2** desde el punto **B** y compararlas con las obtenidas desde **A**.

Si los errores están dentro de tolerancia, se promedian las coordenadas obtenidas.

SOLUCIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA DE HANSEN*

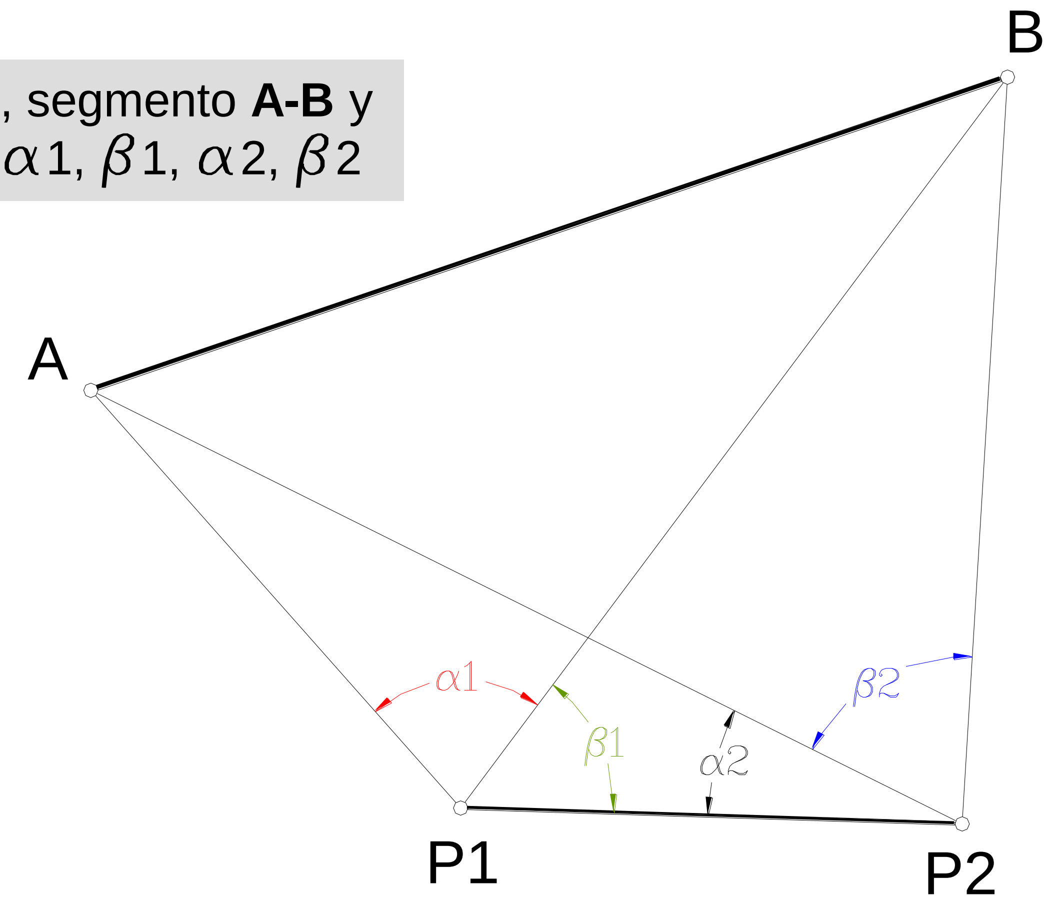
Mediante arcos capaces y sabiendo que el ángulo que abarca los extremos del segmento del arco capaz desde el centro del mismo, es el doble que el que se abarca desde cualquier punto del arco.



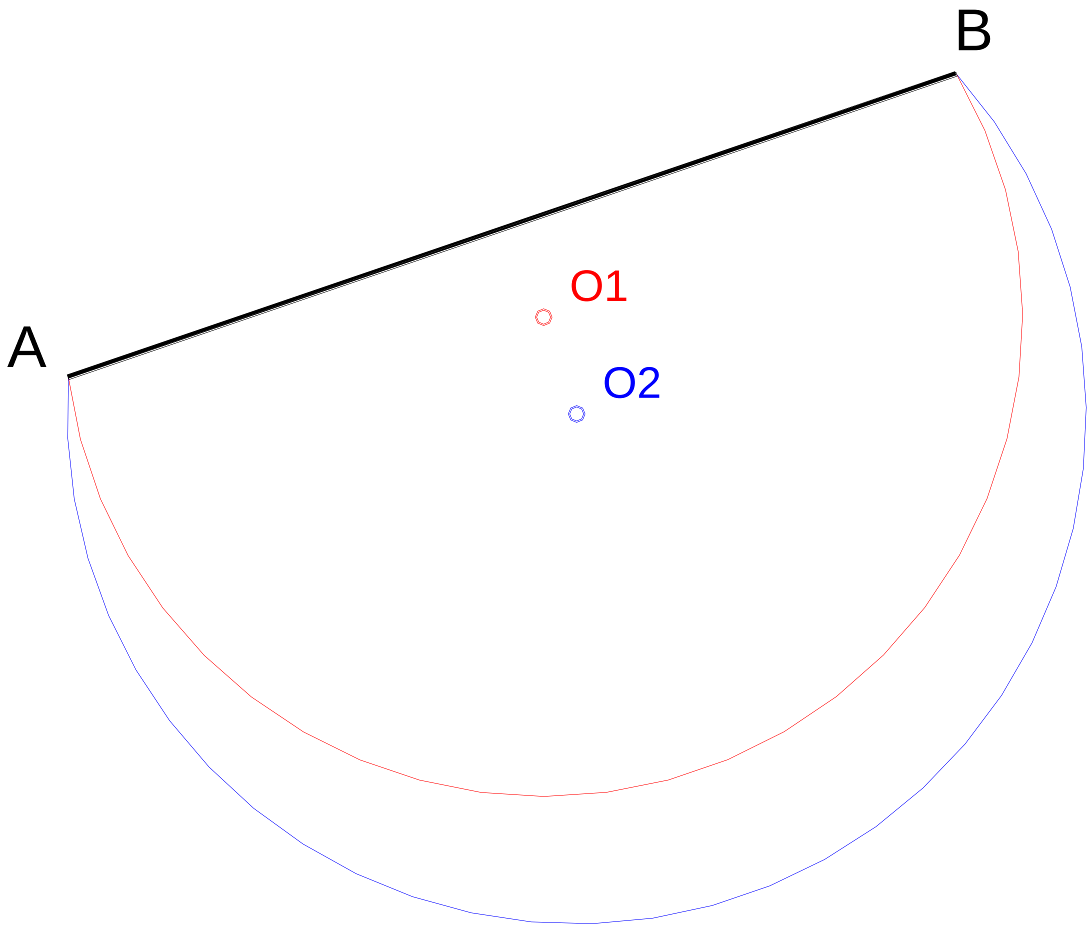
* Método ideado por el Doctor D. Andrés Martín Pastor (profesor del Dto. de Ingeniería Gráfica en la ETSIE de Sevilla).

Datos

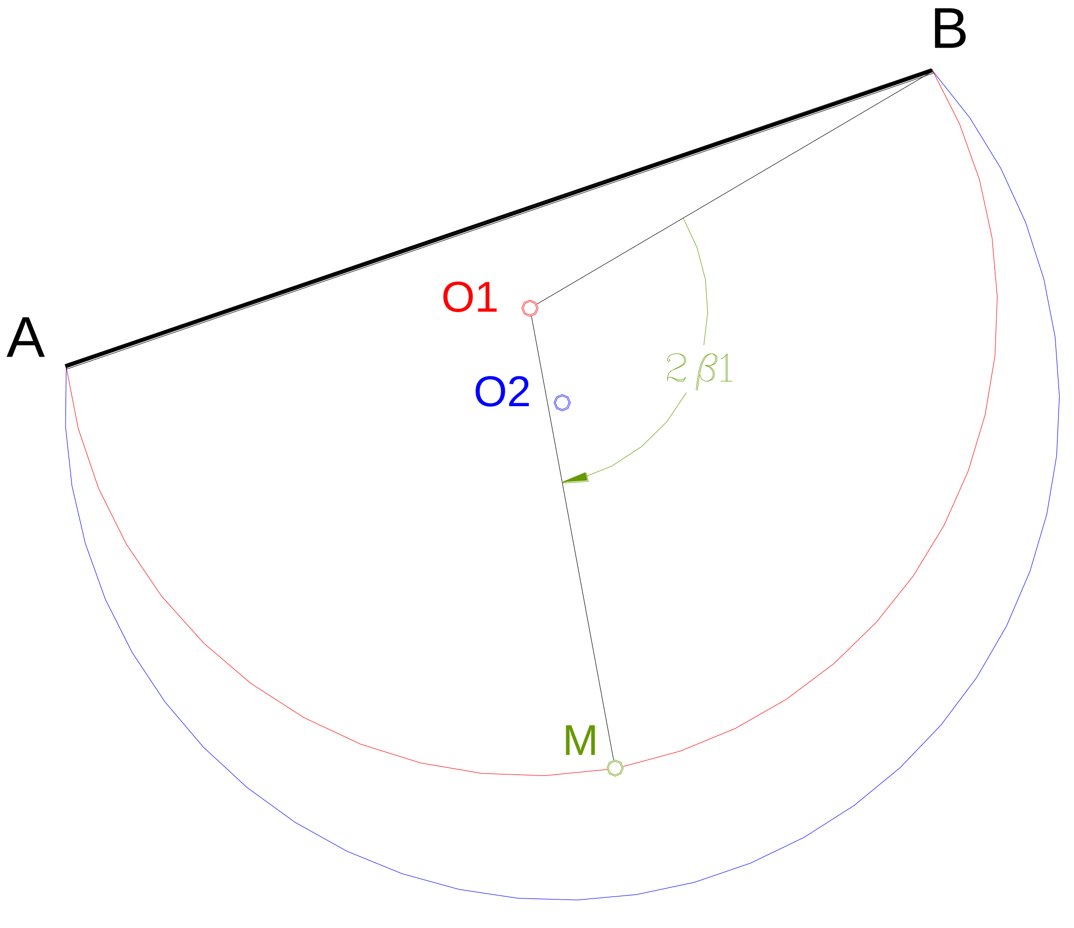
Croquis, segmento **A-B** y ángulos $\alpha 1$, $\beta 1$, $\alpha 2$, $\beta 2$



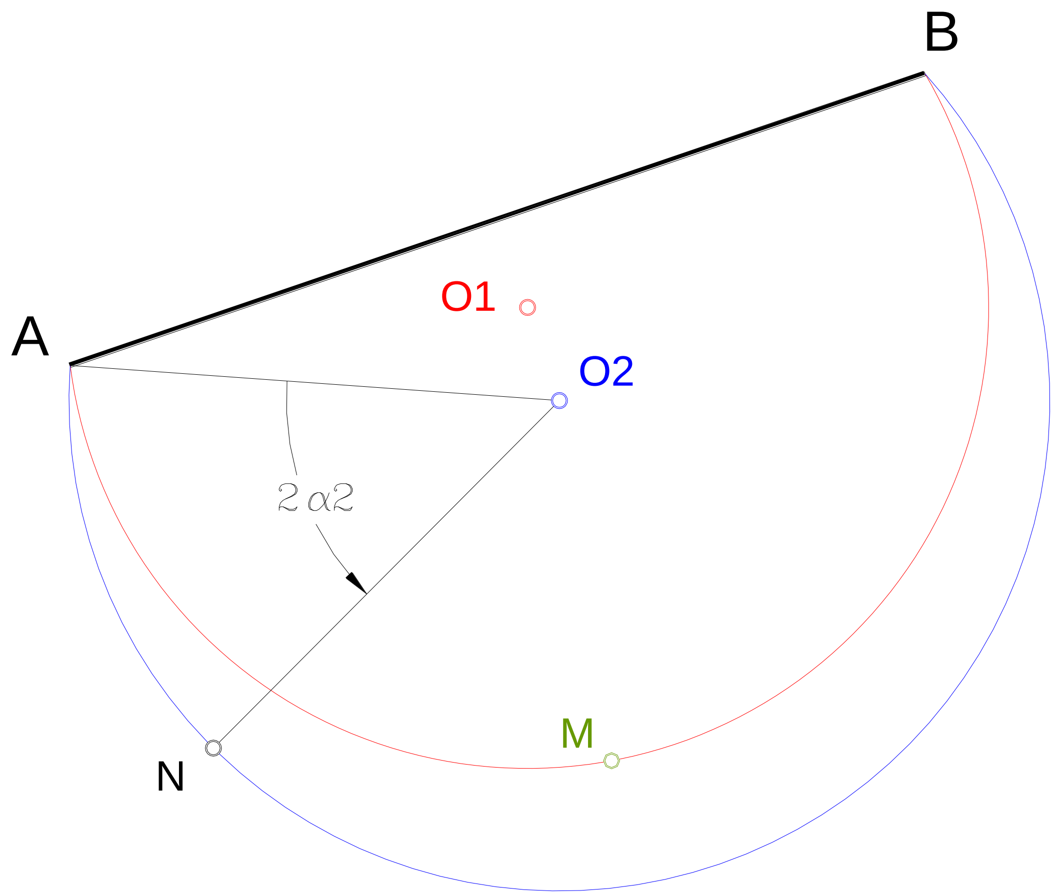
Trazamos los arcos capaces del segmento **A-B** y los ángulos $\alpha 1$ y $\beta 2$, con centros en O1 y O2 respectivamente.



Transportamos el doble del ángulo $\beta 1$ ($2\beta 1$), para obtener el punto **M**.



Transportamos el doble del ángulo $\alpha 2$ ($2\alpha 2$), para obtener el punto **N**.



Trazamos una línea por los puntos **M** y **N**.

La intersección de dicha línea con los arcos capaces **O1** y **O2** nos proporciona los puntos **P1** y **P2** respectivamente.