¿Son lógicos los deseos?

Ángel Nepomuceno Fernández
Seminario Lógica y Lenguaje

29/01/2020

Indice

Operadores deónticos

"En el caso del lenguaje de la lógica deóntica, las normas se expresan por medio de enunciados con operadores deónticos. En este lenguaje hay, por ejemplo, expresiones de la forma $\mathbf{O}A$*, donde* A *es una fórmula y* $\mathbf{O}$ *es el operador de obligación, entendido como un concepto lógico. Es decir, las normas se expresan por medio de operadores lógicos (por esta razón hablamos de una lógica deóntica)"*

(J. Legrís & S. Lerner, "Operadores deónticos anidados y significado. Un sistema bimodal")

Sentido de los operadores deónticos 1/2

La lógica deóntica se incluye en la familia de las lógicas modales. Los dos operadores principales son

- **O**p, entendido como **'Es obligatorio que p'**; aunque se puede entender tabién como 'es indispensable que p', 'es exigible que p', 'es imperativo que p', 'es imprescindible que p', 'debe ser el caso que p', 'es forzoso que p', etc.
- **P**p, entendido como **'Está permitido que p'**; también se puede entender como 'es lícito que p', 'es permisible que p', 'está autorizado que p', 'se vale que p', 'es válido que p', 'es justo que p', 'es correcto que p', 'puede ser que p', etc.

Sentido de los operadores deónticos 2/2

Cabe definir otros operadores deónticos a partir de un operador básico:

- **Permitido**: $\mathbf{P}p = \neg\mathbf{O}\neg p$, **'Está permitido p syss no es obligatorio $\neg p$'**
- **Prohibición**: $\mathbf{F}p = \mathbf{O}\neg p$, **'Esta prohibido p syss es obligatorio $\neg p$'**
- **Omisión**: $\mathbf{Oms}p = \neg\mathbf{O}p$, **'Es omisible p syss no es obligatorio p'**
- **Opción**: $\mathbf{Opt}p = \neg\mathbf{O}p \wedge \neg\mathbf{O}\neg p$, **'Es opcional que p syss no es obligatorio p ni $\neg p$'**

Lenguaje básico de Lógica Deóntica

L_D es un **lenguaje proposicional**, para un conjunto de variables proposicionales $\mathcal{P}$:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi * \varphi \mid \mathbf{O}\varphi \mid \mathbf{P}\varphi$$

- $p \in \mathcal{P}$,
- $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,
- $\mathbf{O}\varphi$ expresa que "es obligatorio que φ"
- $\mathbf{P}\varphi$ "Está permitido φ" (no es obligatorio $\neg\varphi$, $\neg\mathbf{O}\neg\varphi$)

Fácilmente se puede extender a un lenguaje multiagente para un conjunto de agentes Ag. En tal caso, para cada $a \in Ag$, $\mathbf{O}_a$ ("es obligatorio para el agente a que φ") es una fórmula.

Observaciones

- El operador **O** de obligación se toma como un concepto lógico. En este lenguaje se pueden expresar las normas por medio de enunciados con este operador
- Tomando como base la lógica deóntica (estándar) se pueden expresar sis temas específicos de normas (éticas, jurídicas, etc). Ejemplo, si **el sujeto *a* cumple lo que promete** se representa mediante una fórmula φ, $\mathbf{O}\varphi$, representa **es obligatorio que *a* cumpla lo que promete** (o "debe ser el caso que *a* cumpla lo que promete")

Semántica kripkeana

Un **modelo** se define $M = \langle W, \Re_{\mathbf{O}}, v \rangle$, donde

1. $W \neq \varnothing$ —conjunto de "mundos"—
2. $\Re_{\mathbf{O}}$ es una relación definida en W, $\Re_{\mathbf{O}} \subseteq W \times W$, la cual es serial —en su caso, para cada $a \in Ag$, tendríamos $\Re_{\mathbf{O_a}}$—; es decir: para cada mundo $w \in W$, existe al menos un mundo $w' \in W$ deónticamente accesible
3. $v : \mathcal{P} \longrightarrow W$, $p \in \mathcal{P}$, $v(p) \subseteq W$ —conjunto de mundos en los que p es verdadera— (se extiende al conjunto de las fórmulas)

Satisfacción

Dado un modelo $M = (W, \Re_O, v)$, Se define la satisfacción de una fórmula deóntica:

- $M, s \models p$ syss $s \in v(p)$
- En relación con las conectivas proposicionales, como es habitual
- $M, s \models \mathbf{O}\varphi$ syss para cada $w \in W$, si $\langle s, w \rangle \in \Re_O$, entonces $M, w \models \varphi$
- $M, s \models \mathbf{P}\varphi$ syss existe $w \in W$, tal que $\langle s, w \rangle \in \Re_O$ y $M, w \models \varphi$

Sistema básico de lógica deóntica 1/3

Un sistema básico (estándar) de lógica deóntica, SDL, además de los axiomas de la lógica clásica (proposicional), consta de

- Axioma *KD*: $\mathbf{O}(\varphi \to \chi) \to (\mathbf{O}\varphi \to \mathbf{O}\chi)$
- Axioma *DD*: $\mathbf{O}\varphi \to \neg\mathbf{O}\neg\varphi$
- Reglas:
  - *modus ponens*:
  $$\frac{\vdash \varphi \to \chi;\ \vdash \varphi}{\vdash \chi}$$
  - necesitación:
  $$\frac{\vdash \varphi}{\vdash \mathbf{O}\varphi}$$

Sistema básico de lógica deóntica 2/3

- El axioma *DD* establece que **si es obligatoria una sentencia, entonces no es obligatoria la negación de la misma**
- De acuerdo con equivalencias clásicas, $\mathbf{O}\varphi \rightarrow \neg\mathbf{O}\neg\varphi$ equivale a $\neg(\mathbf{O}\varphi \wedge \mathbf{O}\neg\varphi)$. Es decir, el axioma *DD* expresa que **no es el caso que sea obligatoria una sentencia y sea obligatoria su negación**
- Otro asunto es la discusión acerca de si dado que fuera obligatoria una sentencia, lo fuera también la disyunción de ésta con cualquier otra (deducible en SDL):

$$\mathbf{O}\varphi \rightarrow \mathbf{O}(\varphi \vee \chi)$$

Sistema básico de lógica deóntica 3/3

- En SDL, como se ha indicado, se puede considerar la definición del operador **P** a partir del operador **O**:
  - $\mathbf{P}\varphi = \neg\mathbf{O}\neg\varphi$, o bien
  - $\mathbf{P}\varphi \leftrightarrow \neg\mathbf{O}\neg\varphi$,

  Entonces el axioma *DD*: $\mathbf{O}\varphi \rightarrow \mathbf{P}\varphi$
- Si se usan operadores modales aléticos —$\Box$ y $\Diamond$—, se ajustan al sistema modal *KT* (con estos axiomas).
- Se puede añadir el axioma de contextualidad para obtener SDL+:

$$\mathbf{O}(\mathbf{O}\varphi \rightarrow \varphi)$$

Validez de los axiomas

- Los axiomas *KD* y *DD* son válidos syss $\Re_O$ es serial:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{W}, \exists \mathbf{y} \in \mathbf{W} \text{ tal que } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \Re_{\mathbf{O}}$$

- No se cumple (respecto de **O**) el axioma T:

$$\exists x \in W \textbf{ tal que } \langle x, x \rangle \notin \Re_O$$

  es decir, $\Re_O$ no reflexiva

- Se puede optar por el **axioma de contextualidad** —$\mathbf{O}(\mathbf{O}\varphi \to \varphi)$—, para que sea válido, $\Re_O$ ha de ser secundariamente reflexiva:

$$\forall x \exists y \in W \textbf{ tales que, si } \langle x, y \rangle \in \Re_O, \textbf{ entonces } \langle y, y \rangle \in \Re_O$$

Corrección y completud

- *SDL* es correcto y completo —respecto de la clase $\mathcal{M}_{\Re_O} = \{M \in \mathcal{M} : \Re_O \text{ es serial}\}$—, es decir, para cada fórmula φ,

$$\vdash_{SDL} \ \varphi \text{ syss } \models_{\mathcal{M}_{\Re_O}} \varphi$$

- *SDL*+ es correcto y completo (aquí $\Re_O$ es secundariamente reflexiva),

$$\vdash_{SDL+} \ \varphi \text{ syss } \models_{\mathcal{M}_{\Re_O}} \varphi$$

Lógica deóntica desiderativa: sintaxis

Sintaxis de un lenguaje *LDD*[1]:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi * \varphi \mid \mathbf{O}\varphi \mid \mathbf{D}\varphi$$

con el nuevo operador **D**, de manera que $\mathbf{D}\varphi$ debe entenderse como "**es deseable** φ", o "es bueno que se dé φ". Dual ("**es asumible se dé** φ"):

$$\mathbf{M}\varphi \leftrightarrow \neg\mathbf{D}\neg\varphi$$

[1] Seguimos (en parte) J. Legris y S. Lerner (2011): "Operadores deónticos anidados y cambio de significado. Un sistema bidimensional", J. Legris (ed.), *Perspectivas en Lógica Deóntica*, Docuemtos del Centro de Investigación en Epistemología de las CC Económicas, n. 7, UBA, pp. 30-44.

Lógica deóntico-desiderativa: semántica

Para *LDD* un modelo de Kripke $M = (W, \Re_D, \Re_O, v)$, donde

1. $W \neq \varnothing$
2. $\Re_D \subseteq W \times W$ y $\Re_O \subseteq W \times W$, ambas seriales —$\forall x \exists y (x, y \in W) \langle x, y \rangle \in \Re_D$, lo mismo para $\Re_O$—
3. $\Re_D \subseteq \Re_O$ y son secundariamente reflexivas —$\forall x \exists y \langle x, y \rangle \in \Re_X$ tal que $\langle y, y \rangle \in \Re_X$, para $X \in \{\mathbf{D}, \mathbf{O}\}$—
4. $v : LDD \longmapsto W$, $v(\varphi) = \{w \in W : \; M, w \models \varphi\}$

Lógica deóntica desiderativa: observaciones

- Para cada mundo existe un mundo **D-accesible** y un mundo **O-accesible**
- Para cada par de mundos $\langle x, y \rangle \in \Re_D$ (**D**-relacionados), y es **desiderativamente perfecto** (respecto de x). Análogo para los **O**-relacionados
- Los mundos desiderativamente perfectos son deónticamente perfectos (dado que $\Re_D \subseteq \Re_O$, si $\langle x, y \rangle \in \Re_D$, $\langle x, y \rangle \in \Re_O$; si y es desiderativamente perfecto, también es deónticamente perfecto)

Sistema deóntico desiderativo: *SLDD*

Además de las tautologías clásicas, los siguientes (esquemas de) axiomas y reglas:

1. $\mathbf{X}(\varphi \to \chi) \to (\mathbf{X}\varphi \to \mathbf{X}\chi)$, $(\mathbf{X} \in \{\mathbf{D}, \mathbf{O}\})$
2. $\neg(\mathbf{X}\varphi \wedge \mathbf{X}\neg\varphi)$, $(\mathbf{X} \in \{\mathbf{D}, \mathbf{O}\})$
3. $\mathbf{D}(\mathbf{O}\varphi \to \varphi)$
4. $\mathbf{D}(\mathbf{D}\varphi \to \varphi)$
5. Reglas: *modus ponens* y necesitación:

$$\frac{\vdash \varphi \to \chi;\ \varphi}{\vdash \chi}; \quad \frac{\vdash \varphi}{\vdash \mathbf{D}\varphi}, \frac{\vdash \varphi}{\vdash \mathbf{O}\varphi}$$

—nótese que $\vdash$ abrevia $\vdash_{SLDD}$—

Formalizar deseos en ámbitos deónticos 1/2

Bajo la consideración de que el incremento el SMI favorece el consumo interno, sea la norma:

si se desea favorecer el consumo, se debe incrementar el SMI.

Enunciados (no deóntico-desiderativos) subyacentes:

1. "Se favorece el consumo": p
2. "Se incrementa el SMI": q

Formalización de la norma:

$$\mathbf{D}p \rightarrow \mathbf{O}q$$

Formalizar deseos en ámbitos deónticos 2/2

Deducción a partir de la norma:

1. $\mathbf{D}p$ — Premisa
2. $\mathbf{O}q$ — M. P. con norma
3. $\mathbf{D}(\mathbf{O}q \to q) \to (\mathbf{DO}q \to \mathbf{D}q)$ — Ax. 1
4. $\mathbf{D}(\mathbf{O}q \to q)$ — Ax. 3
5. $\mathbf{DO}q \to \mathbf{D}q$ — MP 3,4
6. $\mathbf{DO}q$ — necesitación 2
7. $\mathbf{D}q$ — MP- 5,6

Partiendo de que sea **deseable “favorecer el consumo”**, se concluye que es **deseable “incrementar el SMI”**

Corrección y completud de *SLDD*

SLDD es correcto y completo respecto de la clase

$\mathcal{M}_{LDD} = \{M \in \mathcal{M} : \ \Re_D, \Re_O$ seriales, sec. reflexivas y $\ \Re_D \subseteq \Re_O\}$.

Es decir, para cada fórmula φ se verifica

1. Si $\vdash_{SLDD} \varphi$, entonces $\models_{\mathcal{M}_{LDD}} \varphi$, y
2. Si $\models_{\mathcal{M}_{LDD}} \varphi$, entonces $\vdash_{SLDD} \varphi$

y, en consecuencia,

$$\vdash_{SLDD} \varphi \ \text{ syss } \ \models_{\mathcal{M}_{LDD}} \varphi$$

Diversidad de deseos

Los deseos de un agente pueden ser de varios tipos

1. Poseer un objeto: a **desea que el objeto** t **sea de su propiedad**, o desprenderse del mismo: **negación del anterior**
2. Llevar a cabo una acción: a **desea que se ejecute una acción**
3. Que otro agente lleve a cabo una acción: a **desea que** b **realice una acción**, o impedirlo: **negación de lo anterior**
4. Que ocurra/no ocurra un acontecimiento: a **desea que** φ **sea el caso**, etc.

Conjunto de objetos

Consideramos conjuntos finitos de objetos,

$$\mathbf{Ob} = \{o_1, ..., o_n : n \geq 1\}$$

Un lenguaje puede contener en su vocabulario un conjunto de símbolos para nombrar objetos. Ejemplo: $\{\mathtt{o}_1, ..., \mathtt{o}_\mathtt{m} : \mathtt{m} \geq 1\}$. Los objetos de **Ob** se pueden nombrar con este conjunto de símbolos:

para cada o_k, se eligirá un $\mathtt{o}_\mathtt{t}$ que lo nombra

Desear objetos

Dado un conjunto de objetos **Ob**, y un conjunto de nombres (etiquetas) $\mathtt{Ob}$, se puede tomar el deseo de un agente a de un objeto como el deseo de a de que φ sea un hecho, siendo φ la proposición que afirma

el objeto $\mathtt{o}$ **es propiedad de** a

para $\mathtt{o} \in \mathtt{Ob}$. La representación final será

a **desea que el objeto** $\mathtt{o}$ **sea propiedad de** a

Lenguaje: sintaxis 1/2

Para el conjunto $\mathcal{P}$ de variables proposicionales y el conjunto de agentes Ag, se define L_{AgDD} mediante la regla BNF

$$\varphi ::= p \mid p_o \mid \neg\varphi \mid \varphi * \varphi \mid A_a\varphi \mid \mathbf{O}_a\varphi \mid \mathbf{D}_a\varphi$$

donde

- $p \in \mathcal{P}$
- $p_{a,\mathrm{o}}$ expresa que el agente a posee el objeto o
- $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Lenguaje: sintaxis 2/2

- $A_a\varphi$ se entiende, para $a \in Ag$, como "el agente a tiene conciencia de φ" (el agente es consciente de φ).
- $\mathbf{O}_a$, como "el agente a está obligado a φ" (φ es una obligación para el agente)
- $\mathbf{D}_a$, como "el agente a desea φ"

Lenguaje: semántica

Un modelo $M = (S, \Re_{D_a}, \Re_{O_a}, \mathbf{Ob}, \mathbf{A}, \Pi, v)$, donde

- $S \neq \varnothing$
- $\Re_{D_a}$ y $\Re_{O_a}$ son relaciones definidas en S por cada agente $a \in Ag$ —en principio, como en SDL—
- $\mathbf{Ob} = \{\mathbf{o_1}, \ldots, \mathbf{o_k}\}$, $k \in \mathrm{N}$, es un conjunto de objetos [si hay un nombre (etiqueta), y sólo uno, para cada objeto, se puede tomar como **Ob** el conjunto de estos nombres]
- $\mathbf{A} \in \wp(L_{AgDD})$. $\mathcal{A}_a(s) \subseteq \mathbf{A}$, para cualquier agente a en el mundo $s \in S$
- $\Pi_a(s) \subseteq \mathbf{Ob}$, para cada $a \in Ag$ y $s \in S$
- $v(p) \subseteq S$ para cada $p \in \mathcal{P}$

Observaciones

- Las relaciones de accesibilidad, $\Re_{D_a}$ y $\Re_{O_a}$, de acuerdo con el sistema bimodal antes indicado, son seriales (y secundariamente reflexivas). Hay que señalar sus principales características intuitivas para las aplicaciones correspondientes
- **A** es un conjunto de fórmulas que representa la **conciencia potencial** de los agentes, mientras que $\mathcal{A}_a(s) \subseteq \mathbf{A}$ se refiere a la **conciencia actual (en el mundo s)** de $a \in Ag$. Añadimos al lenguaje la fórmula $\mathcal{C}\varphi$, φ **está en la conciencia** (potencial) de los agentes
- $\Pi_a(s) \subseteq \mathbf{Ob}$ representa el conjunto de objetos que son propiedad del agente a en el mundo s

Satisfacción 1/2

Dado $M = (S, \Re_{D_a}, \Re_{O_a}, \mathbf{Ob}, \mathcal{A}_a, \Pi, v)$ y el mundo s,

- $M, s \models p$ syss $s \in v(p)$
- $M, s \models p_{a,\mathrm{o}}$ syss $\mathrm{o} \in \Pi_a(s)$
- $M, s \models \mathcal{C}\varphi$ syss $\varphi \in \mathbf{A}$
- $M, s \models A_a\varphi$ syss $\varphi \in \mathcal{A}_a(s)$
- $M, s \models \neg\varphi$ syss $M, s \not\models \varphi$

Satisfacción 2/2

- $M, s \models \varphi \vee \chi$ syss $M, s \models \varphi$ o bien $M, s \models \chi$
- $M, s \models \varphi \wedge \chi$ syss $M, s \models \varphi$ y $M, s \models \chi$
- $M, s \models \varphi \rightarrow \chi$ syss $M, s \not\models \varphi$ o bien $M, s \models \chi$
- $M, s \models \mathbf{D}_a\varphi$ syss $M, s' \models \varphi$ para todo $s' \in S$ tal que $\langle s, s' \rangle \in \Re_{D,a}$
- $M, s \models \mathbf{O}_a\varphi$ syss $M, s' \models \varphi$ para todo $s' \in S$ tal que $\langle s, s' \rangle \in \Re_{O,a}$

Axiomática

Un sistema básico multiagente desiderativo-deóntico constará de los (esquemas de) axiomas y reglas siguientes ($\mathbf{X} \in \{\mathbf{D}, \mathbf{O}\}$):

1. $\mathbf{X}_a(\varphi \to \chi) \to (\mathbf{X}_a\varphi \to \mathbf{X}_a\chi)$
2. $\neg(\mathbf{X}_a\varphi \wedge \mathbf{X}_a\neg\varphi)$
3. $\mathbf{X}_a\varphi \to A_a\varphi$ —restricción $\varphi \neq p_{a,o}$—
4. $\mathbf{D}_a(A_a\varphi \wedge \mathbf{O}_a\varphi \to \varphi)$
5. $\mathbf{D}_a(A_a\varphi \wedge \mathbf{D}_a\varphi \to \varphi)$
6. Reglas:
    1. *Modus ponens*
    2. De φ se infiere $\mathbf{X}\varphi$

Observaciones 1/2

- El sistema básico se puede ampliar con nuevos (esquemas de) axiomas
- Veamos una deducción en este sistema básico:
  1. $\mathbf{D}_a\varphi \wedge \neg A_a\varphi$ — hipótesis
  2. $\mathbf{M}_a\varphi$ — hipótesis aux. —dual, $\neg D_a\neg\varphi$—
  3. $\neg(\mathbf{D}_a\varphi \rightarrow A_a\varphi)$ — equiv. 1
  4. $\mathbf{D}_a\varphi \rightarrow A_a\varphi$ — axioma 3
  5. $\neg(\mathbf{D}_a\varphi \rightarrow A_a\varphi) \wedge (\mathbf{D}_a\varphi \rightarrow A_a\varphi)$ — prod. (3,4)
  6. $\neg\mathbf{M}_a\varphi$ — introducción $\neg$ (2-5)
  7. $\mathbf{D}_a\varphi \wedge \neg A_a\varphi \rightarrow \neg\mathbf{M}_a\varphi$ — teor. ded. (1-6)

Observaciones 2/2

- De acuerdo con la deducción, **si el agente a desea φ pero no tiene conciencia de ello, entonces φ no es asumible para él**
- Se alcanza también, *mutatis, mutandis*,

$$\mathbf{O}_a\varphi \wedge \neg A_a\varphi \rightarrow \neg\mathbf{P}_a\varphi$$

Es decir, **si φ es obligatorio para a pero no tiene conciencia de ello, entonces φ no está permitido para a**

Para seguir trabajando

- Desarrollo de la utilización de A y diferenciación **conciencia potencial** y **conciencia actual**
- Condiciones del conjunto **A** (cerrado bajo negación, composición, etc., o bien establecer conciencia de literales y definir cuando el agente tiene conciencia de cada fórmula)
- Cómo se relacionan deseos y obligaciones
  - $\mathbf{D}_a(s) = \{\varphi \in \mathbf{A} : M, s \models \mathbf{D}_a\varphi\}$ —deseos de a en s—
  - $\mathbf{O}_a(s) = \{\varphi \in \mathbf{A} : M, s \models \mathbf{O}_a\varphi\}$ —obligaciones de a en s—
  - Abordar el tema de las intenciones y establecer

$$\mathbf{D}_a(s) \cap \mathbf{O}_a(s) \neq \varnothing$$